基礎物理学 3

電磁気学

加藤正昭 著

東京大学出版会

基礎物理学 3

電磁気学

加藤正昭 著

東京大学出版会

まえがき

本書は大学の理工系の学生のための電磁気学の入門書であり，内容は，教養課程での週一回，半年間程度の講義に相当するものである．

力学と電磁気学は古典物理学の中心であり，原子・分子の世界のことを除けば，すべての自然現象がこの二つから原理的には説明できるはずとさえいえる．したがって自然科学の各分野の研究の上でも，また実用的な応用の面でも，電磁気学の知識が極めて重要な役割をもつことはいうまでもない．

電磁気学の基礎法則はマックスウェルの方程式である．それゆえ力学の講義がニュートンの方程式から始まるように，電磁気学でもマックスウェルの方程式から出発して，すべての電磁気的現象をそれから演繹的に導き出してみせれば，電磁気学の構造は最も明瞭に示せるであろう．しかしマックスウェルの方程式はニュートンの方程式に比べればはるかに複雑であるため，マックスウェルの方程式から出発することは初学者にとってはいかにも天降り的で，直観的描像に欠けるうらみがある．そこで本書では，他の大部分の入門的書物と同様に，クーロンの法則やビオ・サバールの法則のような，適用範囲は限られているがより具体的な法則から始めて，マックスウェル方程式に帰納的に到達する行き方をとった．この帰納のすじみちをはっきりと示すことに特に留意してある．

本書の主要な目標は，上述のようなマックスウェル方程式を基礎とする電磁気学の骨組みの理解と，電磁気学に現れるさまざまな概念の物理的意味を明らかにすることにある．講義の時間的制約も考慮して，問題解決のための数学的手法の説明などは最小限にとどめた．したがって興味ある話題でふれられてないものも多いが，本書で電磁気学を一通り理解した読者が，更に進んだ書物により，本書で割愛したことがらについても学ばれることを期待したい．

目次からわかるように，第1章から第4章まではもっぱら真空中の電磁場が対象であり，最後の第5章で物質中の電磁場をとり扱っている．このように真空中と物質中の電磁気学をはっきりとわける構成をとったのは，電磁気学の構

造を明確にするためと，できるだけ早くマックスウェル方程式に達するためである．第4章まで学べば電磁気学の骨組みは理解したことになる．第5章の物質中の電磁気学では，物質をその微視的構造から眺める立場をとれば興味は倍増する．しかしそれはむしろ物性物理学の役割と考え，本書では物質の電磁気的性質の巨視的な記述にとどめてある．一方，巨視的な電磁気学は物質の微視的構造とは無関係に，あいまいさ無く成り立つことを強調してある．

電磁気学の対象は電場・磁場のようなベクトル場であるため，初学者にとっては難関のベクトル解析が待ちうけている．マックスウェルの方程式は，ベクトル解析を用いて局所的な形（いわゆる微分形）で表すとき，最も美しい形をとる．しかし電磁波の問題を除けば，電磁気学の主要な内容はベクトル解析なしでも理解できる．そこで本書では，主な節の説明をまず積分形の法則を用いて述べ，その後で微分形の法則による説明をくり返してある．微分形の部分は読みとばしても，後の節の理解には支障が無いように配慮した．もちろん読者が微分形で書いた法則に慣れることを強く要望したいが，ベクトル解析に親しめないという理由で電磁気学自体を敬遠することはしないでほしい．

マックスウェルの電磁気学の最大の魅力はもちろん電磁波にあるが，このシリーズでは別の巻（岩本文明著『波動』）で電磁波が詳しく扱われているので，本書ではごく直観的な説明を与えるのにとどめた．これは東京大学における講義の分担に従ったものである．

各章末の問題には，公式の単純な適用の問題から，かなり歯ごたえのあるものまで，種々の程度のものが含まれている．したがって全部できなくても悲観する必要はない．読者の意欲的な挑戦を期待したい．

本書の執筆を依頼されてから長い年月がたってしまったが，その間怠惰な著者を辛抱強く待ち続け，執筆に協力された東京大学出版会の大江治一郎，小池美樹彦両氏に感謝の意を表する次第である．

1986年12月

加藤　正昭

目　　次

第1章　静　電　場

§1.1　クーロンの法則

1800 年にボルタ（Volta）が電池の原理を発見し，継続的な電流が得られるようになるまでは，電気の実験的研究は，もっぱら摩擦によって生じた電気をライデンびん（初期のコンデンサー）に貯めて行われた．この十八世紀の先駆的研究によって，次のような事実が明らかにされた．

（i）　電気は導体を通ってある物体から他の物体へ移ることができる．

（ii）　電気には正負の二種類があり，正と正，負と負の電気の間には斥力が働き，正と負の電気の間には引力が働く．

（iii）　電気は不生不滅である．すなわち，いかなる物理的あるいは化学的変化に際しても，それに関与する物体が持つ電気量の代数和は変化しない．

これらの事実を説明するために，当時は，電気の一流体説や二流体説が唱えられた．しかしその後，電気はそれ自身が物質的な実体ではなく，物質を構成する微視的な粒子の属性とみなされるようになった．微視的な粒子，すなわち電子や原子核は，**電荷**（electric charge）という基本的な属性を持つ．巨視的な物体が帯電する電気量（＝電荷）は，その物体に含まれている原子核と電子の電荷の総和である．これは，物体の質量が，その物体に含まれる微視的な粒子の質量の総和であることに対応する．上の（iii）で述べた事実は**電荷の保存則**と呼ばれ，物理学の最も基本的な法則の一つとされている．

電荷の間に働く力は，二つの電荷を結ぶ直線の方向に働く中心力である．この力の大きさが電荷間の距離によってどう変わるかを述べるのがクーロンの法則である．

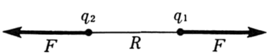


図 1.1　二つの電荷の間に働くクーロン力

クーロンの法則　二つの電荷 q_1 と q_2 が距離 R へだてて静止しているとき(図1.1)，その間に働く力の大きさ F は R^2 に反比例

し，q_1 および q_2 に比例する．すなわち F は，比例定数を k として

$$F=k\frac{q_1q_2}{R^2} \tag{1.1}$$

と表される．これを**クーロンの法則**と呼び，静電気力を**クーロン力**ともいう．クーロンの法則は，静電気学全体を支配する基礎法則である．

クーロン（Coulomb）は，ねじり秤を用いて上の法則を確かめた（1785年）．ねじり秤は，細い線にトルクを加えてねじるとき，ねじれの角度がトルクに比例することを利用して，トルク（したがって力）を測る装置である．

単 位 系　(1.1) の比例定数 k の値を任意に定めれば，クーロンの法則を用いて電荷の単位が定義される．電磁気学で用いる単位系は，三元単位系と四元単位系に大別される．三元単位系は主に理論的な文献などで用いられるもので，k を無次元の定数とみなす．特に $k=1$ とおき，力学的な量には CGS 単位を用いるものを，CGS 静電単位系と呼ぶ．この単位系では，電気量の単位は (1.1) により $\mathrm{cm^{3/2}\cdot g^{1/2}\cdot s^{-1}}$ と定まる．

三元単位系では電気量は複雑な次元を持ち，実用的には便利でない．むしろ，電気量に力学的な量とは独立な次元を与える単位系が自然であろう．それが四元単位系である．四元単位系では (1.1) の比例定数 k は次元を持つ定数で，これを $1/4\pi\varepsilon_0$ と記し，ε_0 を**真空の誘電率**と呼ぶ．この記号を用いれば，クーロンの法則は

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{R^2} \tag{1.2}$$

と表される．一般に用いられる四元単位系は MKSA 単位系で，力学的な量には MKS 単位を用い，比例定数の値は

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=10^{-7}c^2 \tag{1.3}$$

にとる．ここで c は，真空中における光速度を MKS 単位で表した数値を意味する．このとき (1.2) から定義される電気量の単位をクーロン（C）と呼ぶ．比例定数 (1.3) の数値は，$c\fallingdotseq 2.998\times 10^8$ により

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\fallingdotseq 8.988\times 10^9 \qquad (\mathrm{Nm^2/C^2}) \tag{1.4}$$

である．比例定数の値を (1.3) のようにとる理由は，§3.2 で説明する．本書では今後 MKSA 単位系を用いることにする．

(1.2) はクーロン力の大きさを与えるが，これを，力の方向と向きまで表すベクトル式の形に書き表しておこう．電荷 q_1 と q_2 の位置をそれぞれ $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ とし，$\boldsymbol{r}_2$ から $\boldsymbol{r}_1$ へのベクトルを $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$，その方向の単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{R}}$ とすれば(図 1.2)，q_2 が q_1 へ及ぼす力 $\boldsymbol{F}_{12}$ は

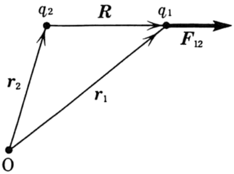


図 1.2 電荷 q_2 が q_1 に及ぼす力

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{R^2}\hat{\boldsymbol{R}} \qquad (1.5)$$

と表される．$\hat{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}/R$ であるから，これは

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{R^3}\boldsymbol{R} \qquad (1.6)$$

とも書ける．

重ね合わせの原理　電荷 $q, q_1, q_2, \cdots$ が点 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots$ にあるとき，q に働く力 $\boldsymbol{F}$ は，$q_1, q_2, \cdots$ が q に及ぼす力のベクトル和

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots \qquad (1.7)$$

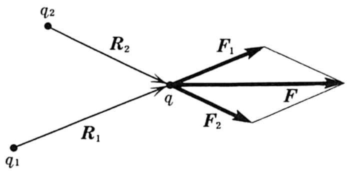


図 1.3 静電気力の重ね合わせ

である (図 1.3)．ここで $\boldsymbol{F}_i (i=1, 2, \cdots)$ は，電荷 q_i が q に及ぼす (1.5) の形のクーロン力である．したがって $\boldsymbol{F}$ を具体的に書けば

$$\boldsymbol{F}=\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_i}{R_i{}^2}\hat{\boldsymbol{R}}_i \qquad (1.8)$$

となる．ただし $\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i$，$R_i=|\boldsymbol{R}_i|$ で，$\hat{\boldsymbol{R}}_i$ は $\boldsymbol{R}_i$ 方向の単位ベクトルである．$\boldsymbol{F}$ が (1.7) の形に表されることは当然のように見えるが，それには，たとえば q_1 が q に及ぼす力が，他の電荷 $q_2, q_3, \cdots$ の存在によって影響を受けないことが前提となっている．これは自明なことではなく，経験的に確かめられた事実である．$\boldsymbol{F}$ が (1.7) の形に表されることを，**重ね合わせの原理**が成り立つという．定性的にいえば，一般に原因 A, B からそれぞれ結果 a, b が生じるとして，原因 A と B の両方が存在するとき，結果が a と b の和の形

で表されるならば，重ね合わせの原理が成り立つというのである．実は (1.5) で，$\boldsymbol{F}_{12}$ が q_1, q_2 に比例すること自身が，重ね合わせの原理を部分的に含んでいる．

〔問〕 なぜか．

重ね合わせの原理は，静電気力についてだけではなく，電磁気学全体にわたって成り立つ一般的法則であり，最終的にはマックスウェル (Maxwell) の方程式が線形の方程式であることに反映される．

§ 1.2 電　　場

電荷 $q_1, q_2, \cdots$ が点 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots$ にあるとしよう．ここで新たに電荷 q を点 $\boldsymbol{r}$ に置く．もとからあった電荷 $q_1, q_2, \cdots$ から q が受ける力 $\boldsymbol{F}$ は，位置 $\boldsymbol{r}$ に依存し，また q に比例するので，これを

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{1.9}$$

とおく．$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は点 $\boldsymbol{r}$ に置かれた単位電荷が受ける力を表す．この $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を，電荷分布 $q_1, q_2, \cdots$ が点 $\boldsymbol{r}$ につくる**電場**または**電界** (electric field) という．

物理学では一般に，空間の各点ごとに与えられる量を場（ば）(field) と呼ぶ．力学では，質点に働く力の場（たとえば地球がつくる重力の場）や，それから導かれる位置のエネルギーなどが，場の重要な例である．静電気力は万有引力と同じ形を持つので，静電気力の場合にも，これを一つの電荷に働く力の場と見る見方が役に立つことは明らかである．しかし実はそれだけでなく，電場の概念はもっと深い物理的意味を持つのであるが，それについてはおいおい説明していくことにしよう．

電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の具体的な形は，クーロンの法則 (1.8) により

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{R_i{}^2}\hat{\boldsymbol{R}}_i \tag{1.10}$$

である ($\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i$)．静止した電荷がつくる電場を**静電場**という．

電荷が連続的に分布している場合には，その分布の仕方は，空間の各点 $\boldsymbol{r}'$ における**電荷密度** $\rho(\boldsymbol{r}')$ で表される．ここで $\rho(\boldsymbol{r}')$ は，点 $\boldsymbol{r}'$ の近傍の単位体積中に含まれる電気量を意味する．電荷が分布している領域を微小体積の集まりと見ると，点 $\boldsymbol{r}'$ の近傍の微小体積 dV' 中に含まれる電荷は $\rho(\boldsymbol{r}')dV'$

であるから（図 1.4），これを（1.10）の q_i に代入し，i についての和を $\boldsymbol{r}'$ についての体積積分で置きかえれば，連続的な電荷分布がつくる電場の式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R^2}\hat{\boldsymbol{R}}dV' \qquad (\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{1.11}$$

が得られる．積分は電荷分布が存在する領域について行う．

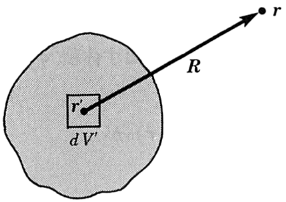


図 1.4　連続的な電荷分布

この節の始めに持ちこんだ電荷 q は，(1.9) によって電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を測定する（あるいは定義する）役割をするので，これを試験電荷と呼ぶことがある．これは電荷 q と，（1.10）や（1.11）で電場の源となっている電荷との区別を強調した呼び方である．電場の概念を導入すると，静電気力は，まず電荷分布が電場をつくり，つぎに電場がその中に置かれた別の電荷に力を及ぼすという，二段階に分かれて記述されることを注意しておこう．

§ 1.3　ガウスの法則

本節と次の節で，静電場の基礎法則であるクーロンの法則を，別の形に書き換える．書き換えをする第一の目的はマックスウェルの方程式に近づくことであるが，後の例で示すように，実際に電場を求める上からも，この書き換えは非常に役に立つ．

流速の場　まず，クーロンの法則に従う電場と，流体の速度の場との間の類推について説明する．ここで考えるのは，縮まない流体の定常（時間的に一定）な流速の場である．原点 O から単位時間当り体積 q の流体がわき出し，空間の各方向へ向かって等方的に流れているとしよう．空間の任意の点 $\boldsymbol{r}$ における流体の速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ は次の考察から容易に求まる．いま O を中心とし，半径 $r=|\boldsymbol{r}|$ の球面 S を考えると（図 1.5），速度場の等方性から，流速 $\boldsymbol{v}$ は S 上の

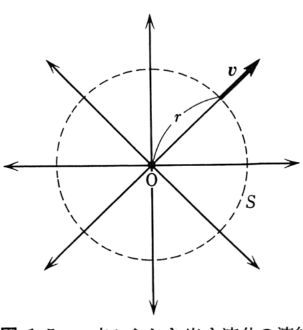


図 1.5　一点からわき出す流体の流線

各点で同じ大きさを持つ．それを $v(r)$ で表す．点 $\boldsymbol{r}$ における $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ の方向は，動径 $\boldsymbol{r}$ の方向，すなわち球面 S の法線の方向であるから，S を通る**流量**(flux)——単位時間に面 S を通過する流体の体積——は $4\pi r^2 v(r)$ である．(これは微小時間 dt の間に S を通過する体積を考えればすぐにわかる．) 一方，流体が縮まず，かつ速度場が定常であることから，S を通る流量は，O から単位時間にわき出す体積 q に等しいはずである．すなわち

$$4\pi r^2 v(r) = q \tag{1.12}$$

で，これより $v(r)$ が

$$v(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

と求まる．方向まで含めれば，速度場は

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.13}$$

と表される．$\hat{\boldsymbol{r}}$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである．

原点 O に置いた電荷 q がつくる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は，クーロンの法則により

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.14}$$

であるから，(1.14) と (1.13) を比べれば，

$$\text{電荷}\quad q \quad \longleftrightarrow \quad \text{わき出し}\ q$$
$$\text{電場}\quad \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \quad \longleftrightarrow \quad \text{速度場}\quad \boldsymbol{v}$$

という対応があることがわかる．クーロン電場が逆二乗法則に従うために，縮まない流体の定常な速度場との類推が成立するのである．

速度場の考察に戻り，今度はわき出し O を囲む任意の閉曲面 S を考え，それを通る流量を求めよう．面 S の上の微小な面積 dS に着目し，そこにおける速度 $\boldsymbol{v}$ の，面 S の法線方向への成分を v_n とすれば，dS を通過する流量は $v_n dS$ であるから (図 1.6)，S 全体を通る流量は S 上の面積分

$$\int_S v_n dS$$

で与えられる．前と同様に，この量は O か

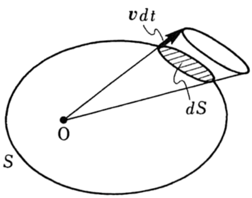


図 1.6　微小時間 dt の間に面要素 dS を体積 $v_n dt dS$ の流体が通過する

ら単位時間にわき出す体積 q に等しいから,

$$\int_S v_n dS = q \tag{1.15}$$

が成り立つはずである．(S が O を中心とする球面の場合には，(1.15) は (1.12) に帰着することに注意.)

念のため，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ の形 (1.13) から，直接 (1.15) を導いておこう．(1.13) を代入すれば，(1.15) の左辺は

$$\int_S v_n dS = \frac{q}{4\pi}\int_S \frac{\cos\theta}{r^2} dS \tag{1.16}$$

となる．ここで θ は，dS における外向き法線 $\boldsymbol{n}$ と動径方向 $\hat{\boldsymbol{r}}$ のなす角である．ところが $\cos\theta\, dS/r^2$ は，dS を底面とし O を頂点とする錐面が，O を中心とする単位半径の球面から切り取る面積に等しい (図 1.7)．これを，dS が点 O に対して張る (あるいは点 O が dS を見る) 立体角と呼び，$d\Omega$ で表す：

$$d\Omega = \frac{\cos\theta}{r^2} dS \tag{1.17}$$

したがって (1.16) は

$$\int_S v_n dS = \frac{q}{4\pi}\int d\Omega$$

と書ける．右辺の積分は点 O を囲む全立体角を与えるが，これは単位半径の球面の表面積であるから 4π に等しい．したがって (1.15) が導かれた．

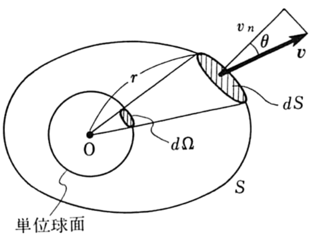


図 1.7　面要素 dS が点 O に対して張る立体角 $d\Omega$

次にわき出し O を囲まない閉曲面 S を考えると，S の一部分 S_1 からは流体が流れこみ，残りの部分 S_2 からは流れ出す (図 1.8)．この二つの部分

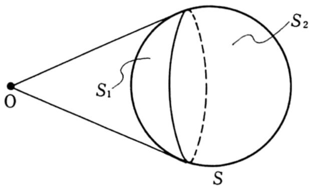


図 1.8 わき出し O が閉曲面 S の外にある場合

を通る流量は等しく，したがって S 全体から外へ出る流量はゼロになるはずである：

$$\int_S v_n dS = 0 \tag{1.18}$$

〔問〕 $\boldsymbol{v}$ の形 (1.13) からこれを確かめよ．

ガウスの法則 上の結果は電場の場合にそのまま翻訳できる．すなわち，点電荷 q がつくる電場 (1.14) に対し，q を囲む任意の閉曲面 S については

$$\int_S \varepsilon_0 E_n dS = q \tag{1.19}$$

が成り立ち，q を囲まない任意の閉曲面 S については

$$\int_S \varepsilon_0 E_n dS = 0 \tag{1.20}$$

が成り立つ．E_n は，面 S の微小部分 dS における，電場 $\boldsymbol{E}$ の外向き法線方向成分である．上の二つの式の左辺の量は，流体の場合の流量に対応するもので，これを面 S を通る**電束** (electric flux) と呼ぶ．（この定義は真空中の電場に対するもので，第5章でとりあげる誘電体の場合には，電束の定義が変わる．）

電場 $\boldsymbol{E}$ が任意の個数の電荷 $q_1, q_2, \cdots$ によってつくられる場合にも，上の結果は容易に拡張できる．重ね合わせの原理により，任意の点 $\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は，各電荷 $q_1, q_2, \cdots$ が $\boldsymbol{r}$ につくる電場 $\boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{r}), \cdots$ の和に等しい：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_i \boldsymbol{E}^{(i)}(\boldsymbol{r}) \tag{1.21}$$

ふたたび電場の中に任意の閉曲面 S をとり（図 1.9），S から外へ出る電束を考えると，これは各電場 $\boldsymbol{E}^{(i)}$ からの寄与の和として表される：

$$\int_S \varepsilon_0 E_n dS = \sum_i \int_S \varepsilon_0 E_n{}^{(i)} dS \qquad (1.22)$$

右辺の各項は，(1.19)，(1.20) により，電荷 q_i が S の内部にあれば q_i に等しく，q_i が S の外部にあればゼロである．したがって上式の右辺は，閉曲面 S の内部にある電荷の和に等しい．すなわち

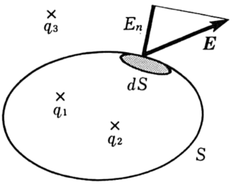


図 1.9　閉曲面 S から外へ出る電束

$$\int_S \varepsilon_0 E_n dS = Q \qquad (1.23)$$

である．ここで Q は

$$Q = \sum_{S内部} q_i = 面\ S\ の内部の全電荷 \qquad (1.24)$$

である．(1.23) を**ガウス** (Gauss) **の法則**と呼ぶ．

〔注意〕 面 S 上の各点の電場 $\boldsymbol{E}$ には，(1.21) が示すように，面 S の内外のすべての電荷による電場が寄与する．しかし (1.22) の電束を計算すると，面 S の外部の電荷の寄与は，相殺して消えてしまうのである．

電荷が連続的に分布している場合にも，連続的な電荷分布は点電荷の分布の極限とみなせるから，上と全く同じ結果が得られる．すなわち

$$\int_S \varepsilon_0 E_n dS = Q = \int_V \rho dV \qquad (1.25)$$

右側の積分は，閉曲面 S の内部の領域 V について，電荷密度 ρ を体積積分することを意味する．

電 気 力 線　流体の流れの定性的な様子は，空間の各点における速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の方向を結ぶ曲線を画けば，直観的に理解できる．この曲線を**流線**という．流線の接線の方向は，その点における $\boldsymbol{v}$ の方向を表す．さらに，流線を束ねてできる細い管を考え，これを**流管**と呼ぶ．ある流管の内部の流体は，その流管に沿って流れ，流管の外へ出ることはない．流管の任意の場所の断面積を ΔS とし，その点の流速の大きさを v とすれば，その断面を通る流量は $v\Delta S$ である．流管の内部にわき出しや吸い込みが無ければ，縮まない流体の定常な流れでは，流量は流管のどの場所でも同じはずである．したがって一本の流管について見ると，断面積 ΔS は流速 v に反比例する．

同様に，空間の各点の電場 $\boldsymbol{E}$ の方向を結んで画いた曲線を**電気力線**という．

電気力線の接線の方向は，その点の $\boldsymbol{E}$ の方向を表す．静電場の場合には，電気力線は正電荷から始まり負電荷に終わる．（時間変化する電磁場の場合には，電気力線が閉曲線になることもある．）流管と同様に，壁が電気力線から成る細い管を**電気力管**と呼ぶ(図1.10)．電気力管の任意の場所の断面積を ΔS，その場所の電場の大きさを E とすれば，この断面を通る電束は $\varepsilon_0 E\Delta S$ である．電気力管の内部に電荷が無ければ，この電気力管の内部を通る電束はどこでも等しく，したがって一本の電気力管について見ると，断面積はその場所の電場 E に反比例する．

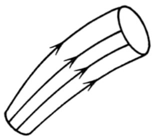


図 1.10　電気力管

〔**問**〕 このことを形式的に示すには，電気力管の任意の一部分をとり，その管壁と両端の断面から成る閉曲面を S として，これにガウスの法則を適用すればよい．それを試みよ．

ガウスの法則から電場が求められる例を，以下でいくつか示そう．

【例 1】 球面上の一様な電荷分布がつくる電場　半径 a の球面 S_0 上に，電荷 Q が一様な面密度で分布している．電荷分布が中心 O に関し球対称であるから，電場も O に関し球対称な形を持つはずである．したがって任意の点 $\boldsymbol{r}$ の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は動径 $\boldsymbol{r}$ の方向を向き，その大きさは距離 $r=|\boldsymbol{r}|$ のみによるので，それを $E(r)$ で表す．$E(r)$ を求めるには，O を中心とする半径 r の球面 S を考え，それにガウスの法則を適用する（図1.11）．S 上の各点では $E_n=E(r)$ であるから，S から外へ出る電束は

$$\int_S \varepsilon_0 E_n dS = 4\pi r^2 \varepsilon_0 E(r)$$

である．一方，球面 S の内部の全電荷は，$r>a$ ならば Q，$r<a$ ならばゼロである．

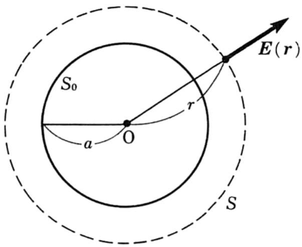


図 1.11　球面 S_0 上に一様に分布した電荷がつくる電場．球面 S にガウスの法則を適用する

ゆえにガウスの法則により，球面 S_0 の内外の電場は

$$E(r)=\begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & (r>a) \\ 0 & (r<a) \end{cases}$$

と求まる．球外の電場は，点電荷 Q が点 O にある場合の電場と区別がつかない．このような簡単な結果が得られることは，クーロンの法則（1.11）から見ると不思議に思われるが，球面上に一様に分布したわき出しから出る流れを思い浮かべれば，上の結果が自然なものであることが納得できよう．

【例 2】 一様に帯電した球がつくる電場　　半径 a の球の内部に，一様な電荷密度で電荷 Q が分布している場合の電場も，前例と同じ方法で求めることができる．結果は

$$E(r)=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (r\geqq a)\\[2mm] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{a^3} & (r\leqq a)\end{cases}$$

である．

〔問〕 上の結果を導け．

【例 3】 平面上の電荷分布がつくる電場　　無限に広い平面上に，一様な面密度 σ で電荷が分布している場合を考える．このときできる電場を求めるために，まず平面上にわき出しが一様に分布している場合の流れを考えよう．（これはガウスの法則を用いることと本質的に同じである．）対称性から，わき出した流体は平面の両側に半分ずつ向かう．流線は平面に直交する直線で，流速は一定である．これを電場に翻訳すれば，平面の両側に平面と直交する一様な電場ができることがわかる（図 1.12）．単位面積当たり σ の電荷から $\sigma/2$ ずつの電束が両側に向かうので，電場の大きさは

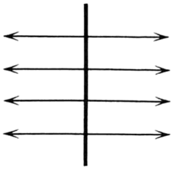


図 1.12　平面上に一様に分布した電荷からでる電気力線

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

である．

§ 1.4　電　　位

静電場の中で，単位電気量の試験電荷が持つ位置のエネルギーが電位である．クーロン力と万有引力はどちらも逆二乗法則に従うので，万有引力の場の位置のエネルギーの形から直ちに静電場の電位が得られるのだが，ここでは力学の復習を兼ねて，位置のエネルギーの定義から述べておくことにする．

位置のエネルギー　　与えられた電場の中に試験電荷 q を置き，これをゆっくりと移動させるとき，我々がしなければならない仕事を考える．電荷 q は電場から力 $q\boldsymbol{E}$ を受けるので，これを相殺する外力 $\boldsymbol{F}_{\rm ext}=-q\boldsymbol{E}$ を電荷に加えれば，電荷をゆっくりと動かすことができる．したがって電荷 q に微小な変位 $\Delta\boldsymbol{l}$ をさせるとき，外力は仕事

$$\boldsymbol{F}_{\rm ext}\cdot\Delta\boldsymbol{l}=-q\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{l}\tag{1.26}$$

をする．点 P_0 から点 P_1 まで道 C に沿って電荷 q を動かすときに外力がする仕事は，道 C を微小区間に分け，それぞれの区間で (1.26) を計算し，これを加え合わせれば求められる（図 1.13）．道 C の分割を細かくしていったときの，和 $\sum \boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{l}$ の極限を

$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_C E_l dl$$

と書き表し，道 C に沿う $\boldsymbol{E}$ の線積分という．ここで E_l は，曲線 C の接線の方向への $\boldsymbol{E}$ の成分を表す．上の書き方を用いれば，求める仕事 W は

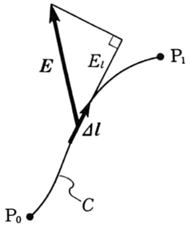


図 1.13 電場 $\boldsymbol{E}$ の線積分

$$W=-q\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{1.27}$$

である．

ここで，点電荷 q_1 がつくる静電場の中で，上の仕事 W を具体的に計算しよう．q_1 の位置を原点 O にとれば，任意の点 $\boldsymbol{r}$ の電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.28}$$

であるから，微小変位 $\Delta\boldsymbol{l}$ に要する仕事は

$$-q\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{l}=-\frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\Delta\boldsymbol{l}}{r^2}=-\frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta r}{r^2}$$

である．ここで Δr は原点 O からの距離の増分

$$\Delta r=|\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{l}|-|\boldsymbol{r}|\fallingdotseq\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\Delta\boldsymbol{l}$$

である（図 1.14）．上の仕事を点 P_0 から点 P_1 までの道 C に沿って加え合

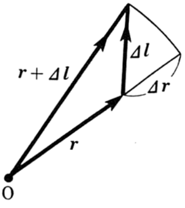


図 1.14 原点 O からの距離の増分 Δr は $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\Delta\boldsymbol{l}$ に等しい

わすと

$$W=-\frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r^2}=\frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_0}\right) \tag{1.29}$$

となる．ここで $r_0=\overline{\mathrm{OP_0}}$, $r_1=\overline{\mathrm{OP_1}}$ である．

この結果は，電荷 q を点 $\mathrm{P_0}$ から点 $\mathrm{P_1}$ まで動かすのに要する仕事 W が，始点 $\mathrm{P_0}$ と終点 $\mathrm{P_1}$ だけで決まり，途中の道 C のとり方にはよらないことを示している．さらに始点 $\mathrm{P_0}$ を固定すれば，W は点 $\mathrm{P_1}$ の関数となるが，これが電荷 q が点 $\mathrm{P_1}$ で持つ位置のエネルギーである．点 $\mathrm{P_0}$ は位置のエネルギーの基準点である．

上では点電荷 q_1 による電場について考えたが，任意の電荷分布は点電荷の集まりとみなせるから，一般の電荷分布による静電場は点電荷の電場の重ね合わせとして表せる．このことから，一般の静電場の中で試験電荷を移動させる場合にも，それに要する仕事は始点 $\mathrm{P_0}$ と終点 $\mathrm{P_1}$ だけで決まり，途中の道のとり方にはよらないことがわかる．したがって，この仕事 $W(\mathrm{P_0},\mathrm{P_1})$ は，点 $\mathrm{P_1}$ における試験電荷の位置エネルギーという意味を持つ．

電　位　与えられた静電場の中で，単位電気量の試験電荷が持つ位置のエネルギーを**電位** (electric potential) と呼ぶ．点 P における電位を $\varphi(\mathrm{P})$ で表す．電場から電位を求めるには，基準点 $\mathrm{P_0}$ から点 P までの任意の道 C をとり，線積分

$$\varphi(\mathrm{P})=-\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_{\mathrm{P_0}}^{\mathrm{P}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{1.30}$$

を計算すればよい．二点 $\mathrm{P_0}$, P 間の線積分は，一般には途中の径路 C のとり方によるので，(1.30) の最後の式のような書き方は普通はしないのだが，静電場 $\boldsymbol{E}$ の線積分は上述のように C のとり方に依存しないので，上のように書くことも許される．上の式は

$$\varphi(\mathrm{P})=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P_0}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{1.31}$$

と表してもよい．言葉でいえば，単位電気量の試験電荷が点 P から基準点 $\mathrm{P_0}$ まで動く間に，電場 $\boldsymbol{E}$ が試験電荷にする仕事が電位 $\varphi(\mathrm{P})$ である．

点電荷がつくる電場 (1.28) の場合には，(1.30) の線積分はすでに (1.29) で計算してある．基準点 $\mathrm{P_0}$ を無限遠にとれば，原点 O にある点電荷 q_1 を源とする電場の電位が

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} \tag{1.32}$$

と求められる.（特に断らない限り，今後も電位の基準点を無限遠にとる.）

一般に点 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots$ に電荷 $q_1, q_2, \cdots$ がある場合には，この電荷分布がつくる電場の電位は，(1.32) の重ね合わせにより

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{R_i} \quad , \quad R_i=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i| \tag{1.33}$$

となる．電荷分布が連続的な場合には，電荷密度を ρ とすれば，電位は

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}dV' \quad , \quad R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \tag{1.34}$$

と表される．(1.33)，(1.34) は，電荷分布から電位を求める一般的公式である．

電位の単位は J/C であるが，これをボルト (V) と呼ぶ．

【例 1】 一様に帯電した球　半径 a の球の内部に，一様な電荷密度で電荷 Q が分布しているとき，任意の点 $\boldsymbol{r}$ における電位を求めよう．電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ を計算するには(1.34)を用いてもよいが，この電荷分布による電場が § 1.3 の例 2 で求めてあるので，それを(1.31) に代入することにする．電場が中心力であるから，(1.31) は

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\int_r^\infty E(r')dr'$$

と書ける．したがって，$\varphi(\boldsymbol{r})$ の形も球対称で r にのみ依存する．電場の具体的な形を入れれば，電位が次のように得られる（図 1.15）．

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} & (r\geqq a)\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3a^2-r^2}{2a^3} & (r\leqq a)\end{cases}$$

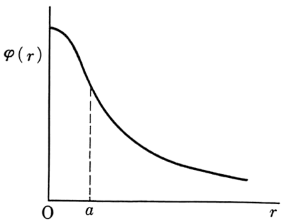


図 1.15　一様な電荷密度の球による電位

球外の点における電位が，点電荷による電位と一致するのは当然であろう．

電位の勾配　(1.30) は電場から電位を定義する式であるが，逆に電位から電場を求める式を導こう．近接した二点 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}+\varDelta\boldsymbol{r}$ の間の電位差は，$\varDelta\boldsymbol{r}=(\varDelta x, \varDelta y, \varDelta z)$ について一次までとる近似では

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}+\varDelta\boldsymbol{r})-\varphi(\boldsymbol{r})&=\varphi(x+\varDelta x, y+\varDelta y, z+\varDelta z)-\varphi(x, y, z)\\ &\fallingdotseq\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varDelta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\varDelta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\varDelta z\equiv\nabla\varphi\cdot\varDelta\boldsymbol{r}\end{aligned} \tag{1.35}$$

と表せる．ここで

$$\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

はスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の**勾配**（gradient）と呼ばれるベクトル場で，$\mathrm{grad}\,\varphi$ という記号も用いられる．一方，(1.30) から

$$\varphi(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-\varphi(\boldsymbol{r})=-\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}\fallingdotseq-\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{r}$$

であるから，(1.35) により

$$\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{r}=-\nabla\varphi\cdot\Delta\boldsymbol{r} \tag{1.36}$$

と表せる．この式は任意の $\Delta\boldsymbol{r}$ に対して成り立つので，ベクトルとしての等式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{1.37}$$

が得られる．これが，電位から電場を導く表式である．

ある曲面上で電位が一定値を持つとき，その曲面を**等電位面**という．(1.35) で $\Delta\boldsymbol{r}$ をいろいろな方向にとってみればわかるように，勾配 $\nabla\varphi$ は，等電位面と直交し，電位が最も急速に増加する方向を向くベクトルである．したがって電場 $\boldsymbol{E}$ は等電位面と直交し，電位の下り勾配の方向を向くベクトルである．

〔**問**〕 点電荷による電位 (1.32) から，(1.37) によって電場 (1.28) が導かれることを確かめよ．

電気双極子　与えられた電荷分布から電場を求めるとき，公式 (1.10) によって直接に電場を計算するより，まず (1.33) によって電位を求め，次に (1.37) により電場を導く方が一般に容易である．ここでは，単独の点電荷について簡単な電荷分布として，二つの点電荷 q と $-q$ が微小間隔 d で並んでいる場合を考える．この電荷分布を**電気双極子**（electric dipole）と呼び，積 $p=qd$ を**双極子モーメント**（dipole moment）という．

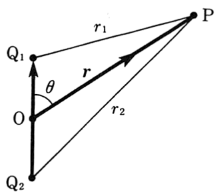


図 1.16　電気双極子 $\overrightarrow{Q_2Q_1}=\boldsymbol{d}$

電荷 q と $-q$ の位置をそれぞれ Q_1, Q_2 とし，Q_1Q_2 の中点に原点 O をとる．ベクトル $\overrightarrow{Q_2Q_1}$ を $\boldsymbol{d}$ で表す．空間の任意の点 $P(\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r})$ に対し，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{d}$ の間の角を θ とする（図 1.16）．点 P における電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ は二つの点電荷 q および $-q$ による電位の重ね合わせであるから，二つの

点電荷とPの距離を $\overline{\mathrm{Q_1P}}=r_1$, $\overline{\mathrm{Q_2P}}=r_2$ とおけば,

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

である. r が d に比べて十分に大きい領域では, d/r について一次までとる近似で

$$\frac{1}{r_1}\doteqdot\frac{1}{r-\dfrac{d}{2}\cos\theta}\doteqdot\frac{1}{r}+\frac{d}{2r^2}\cos\theta$$

$$\frac{1}{r_2}\doteqdot\frac{1}{r+\dfrac{d}{2}\cos\theta}\doteqdot\frac{1}{r}-\frac{d}{2r^2}\cos\theta$$

であるから, これを上式に代入し

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{r^2}\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \tag{1.38}$$

を得る. 双極子モーメントをその方向まで含めて表すベクトル $\boldsymbol{p}$ を

$$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{d}$$

で定義すれば, 上式は

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1.39}$$

とも表される. (1.38) あるいは (1.39) が, $r\gg d$ の領域において電気双極子による電位を表す表式である. これから決まる等電位面と電気力線を, 図 1.17 に示してある.

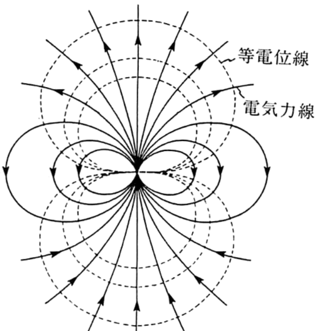


図 1.17 電気双極子の電場

〔問〕 (1.39) と (1.37) から, 双極子がつくる電場が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}(3(\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{p})$$

であることを示せ.

分子は一般に電気双極子である. HCl のような二原子分子が双極子であることは容易に理解できるが, H_2O のような三原子以上の分子も一般に双極子の電場をつくる. このことを次に説明しよう.

全電荷がゼロの n 個の電荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ が，点 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \cdots, \mathrm{Q}_n$ に分布しているとする（図 1.18）．この電荷分布の近くに原点 O をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_i}=\boldsymbol{r}_i$ $(\boldsymbol{i}=1, 2, \cdots, n)$ とおく．いま仮想的に点 O に電荷 $-q_1$ を置けば，この電荷と点 Q_1 の電荷 q_1 はモーメント $\boldsymbol{p}_1=q_1\boldsymbol{r}_1$ の双極子をつくる．さらに点 O に仮想的に電荷 $-q_2$ を置けば，双極子 $\boldsymbol{p}_2=q_2\boldsymbol{r}_2$ ができる．これを続ければ n 個の双極子 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ ができるが，$\sum q_i=0$ であるから原点 O に置いた電荷は全体で相殺し，結局 O には何も置かなかったのと同じである．すなわち，はじめに与えられた電荷分布は，n 個の双極子の集合と同等である．したがってその電位は，各双極子 $\boldsymbol{p}_i$ がつくる電位の重ね合わせとして得られる：

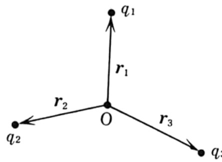


図 1.18　全電荷がゼロの電荷分布は近似的に電気双極子とみなせる

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{\boldsymbol{p}_i\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

（各双極子 $\boldsymbol{p}_i$ の中心の位置は O から $\boldsymbol{r}_i/2$ だけずれているが，d_i/r の一次までとる近似ではこのずれは無視できる．）電荷分布 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ の全双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ を

$$\boldsymbol{p}=\sum_i\boldsymbol{p}_i=\sum_i q_i\boldsymbol{r}_i$$

で定義すれば，上式は

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

と表される．すなわち全電荷がゼロの n 個の電荷の分布がつくる電位は，いま考えている近似では，一つの双極子がつくる電位と同じである．

〔問〕 原点 O のとり方を変えると各 $\boldsymbol{p}_i$ は変わるが，和 $\boldsymbol{p}$ は変化しないことを確かめよ．

電位が存在するための条件　　与えられた電場 $\boldsymbol{E}$ に対して，(1.30) で定義される電位 $\varphi(\mathrm{P})$ が点 P の一価関数として定まることは，二点 P_0 と P を結ぶ道に沿う線積分 (1.30) が道のとり方によらないこと，すなわちこの二点を結ぶ任意の二つの道 C_1 と C_2 に対し

$$\int_{C_1}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{C_2}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

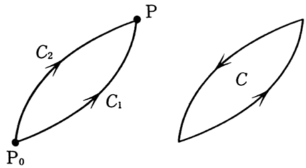


図 1.19　P_0 から P までの二つの道 C_1, C_2 を結べば一つの閉曲線 C となる

が成り立つことと同等である（図 1.19）．C_1 と C_2 をいっしょにすれば閉曲線 C ができるので，上の条件は，空間内の任意の閉曲線 C に沿う $\boldsymbol{E}$ の線積分に対し

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0 \qquad (1.40)$$

が成り立つといってもよい．これが電位が一価関数として存在するための必要十分条件である．上式の左辺の量を，閉曲線 C に沿う $\boldsymbol{E}$ の**循環**（circulation）と呼ぶ．静電場に対して上の条件が成り立つことは，前に確かめてある．物理的にいえば，上式の左辺は，単位電気量の試験電荷が閉曲線 C を一周するときに電場 $\boldsymbol{E}$ が行う仕事を表す．第一種永久機関の存在を否定するエネルギー保存則から見れば，この仕事がゼロになるのは自然である．

静電場の基礎法則　　§1.3 では，いくつかの例で，電場をガウスの法則

$$\varepsilon_0\int_S E_n dS=\int_V \rho dV \qquad (1.41)$$

から導き出すことができた．このことからガウスの法則は，静電場の基礎法則であるクーロン法則と，一見等価であるように見える．これは正しいだろうか．いいかえれば，電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ が与えられたとき，任意の閉曲面 S に対して（1.41）を満たす場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は一意的に定まるであろうか．もし一意的に定まるならば，我々はクーロン電場（1.11）について（1.41）が成り立つことを知っているので，このクーロン電場が（1.41）を満たす唯一の解ということになり，ガウスの法則とクーロンの法則は等価になる．

しかしこれが正しくないことは，次の考察から明らかである．いま，空間のどこにもわき出しを持たないベクトル場，すなわち任意の閉曲面 S に対して

$$\int_S \widetilde{E}_n dS=0 \qquad (1.42)$$

を満たすようなベクトル場 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ を考える．このようなベクトル場は実際に存在する．たとえば図 1.20 のように，ある軸に関し軸対称で，電気力線がそ

の軸まわりの渦状の閉曲線であるようなベクトル場を $\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ とすれば，これはどこにもわき出しを持たず，(1.42) を満たす (§ 3.4 参照)．そこで，ガウスの法則 (1.41) を満たすベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ から

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$$

によって新しいベクトル場 $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r})$ を定義すると，明らかに $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r})$ も (1.41) を満たす．すなわち，ガウスの法則の解は一意的には定まらない．

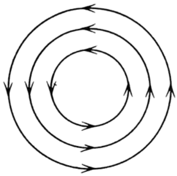


図 1.20　わき出しの無いベクトル場の力線

では電場に対し，ガウスの法則 (1.41) のほかに，循環がゼロという法則 (1.40) まで要求すれば，この二つの条件を満たす場は一意的に定まるであろうか．ふたたび上述の二つの場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r})$ を考えると，これがどちらも (1.40) を満たせば，その差 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ も，任意の閉曲線 C に対し

$$\oint_C \widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot d\boldsymbol{l}=0 \tag{1.43}$$

を満たさねばならない．図 1.20 の場合には電気力線に沿う循環がゼロでないので，少なくともこのような場は (1.43) によって排除される．この結果は一般的であろうか．すなわち，(1.42) と (1.43) の両方を満たす場，言葉でいえば，空間中のどこにもわき出しを持たず，かつどこでも循環がゼロであるような場は，存在しないであろうか．

実はこの予想もそのままでは成り立たない．たとえば空間のいたる所で一定の場 $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ を考えると，これがどこにもわき出しを持たず，循環もゼロであることは明らかである．しかし物理的にいえば，このような場は無限遠にわき出し(電荷分布) を持つ場である．それに対し我々は，原点付近の電荷分布がつくる電場を問題にしている．そこで電場に対して，十分遠方で r^{-2} の程度のはやさでゼロに近づくという要求を加えよう．(r は原点からの距離を意味する．) この境界条件を要求すれば，今度は (1.42)，(1.43) の両方を満たす $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ は存在しないことが数学的に証明できる．したがって (1.41)，(1.40) および上述の境界条件を満たす電場は一意的に定まる．それが，与えられた電荷分布がつくるクーロン電場 (1.11) である．このように，ガウスの法則 (1.41)，循環ゼロの法則 (1.40)，および上の境界条件の三つで，クーロンの法則と等価になるのである．

ガウスの法則はクーロンの法則より情報量の少ない，したがってより一般的な法則である．第4章で説明するように，時間的に変化する電磁場に対しては(1.40)は成り立たなくなるが，その場合ともガウスの法則は依然として成り立つ．実際，ガウスの法則は，電磁気学全体の基礎法則（すなわちマックスウェルの方程式）の一部分なのである．

§1.5 導 体

周知のように，物質は，その中での電流の流れ方により，導体と絶縁体に大別される．絶縁体（誘電体ともいう）の考察は第5章で行うことにして，本節では導体をとりあげる．代表的な導体はもちろん金属である．金属中には，その内部を自由に動くことのできる電子（伝導電子）が，原子の数とほぼ同数だけ存在する．この多数の電子が同一方向に動けば，電荷の巨視的な流れが生じる．これが導体中の電流である．電解質の溶液も導体で，この場合には電荷を運ぶのは正負のイオンである．半導体の電気抵抗は金属にくらべればはるかに大きいが，電流が流れる点では金属と共通であるから，本節の議論の範囲ではこれも導体に含めることができる．

導体中に電場があれば，伝導電子やイオンが電場から力を受けて一方向に動き，電流が生じる．したがって，導体に電流が流れていない状態では，導体中に電場は存在しない．そのような状態を問題にする限り，導体の電気的なふるまいは単純であり，個々の物質の性質には依存しない．

導体中に電流が流れていない状態に関して，次のことがいえる．

(i) 上で述べたように，導体中には電場は存在しない．

(ii) 導体内部では，電荷密度はいたる所でゼロである．もし電荷密度がゼロでない所があれば，そこからガウスの法則に従う電気力線が出るため，その電気力線に沿って電場が存在し，そこで電流が流れてしまう．

(iii) 電荷が分布できるのは，導体の表面だけである．導体表面の電荷は，導体内部で $\boldsymbol{E}=0$ が実現されるように分布する．たとえば導体球に電荷を与えると，(外部電場がなければ) この電荷は球の表面に一様に分布する．

(iv) 帯電していない導体を電場の中に置くと，電場から力を受けて導体中で電荷の移動が起こり，導体表面に電荷分布が現れる．（もちろんその電

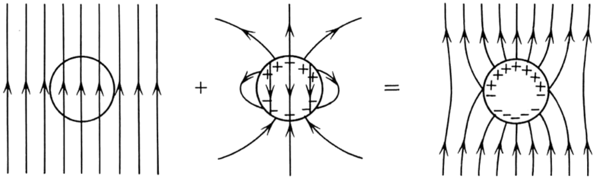


図 1.21　一様な電場の中においた導体球

荷の総和はゼロである.）導体内部では，表面電荷分布がつくる電場が外部電場を打ち消し，電場が無くなる（図 1.21）．このように，外部電場の影響で導体表面に電荷分布が現れる現象を，**静電誘導**という．

（v）　導体内部には電場がないので，導体内部はどこも同一の電位を持つ．連続性から，導体表面も内部と同じ電位を持つ．すなわち導体表面は一つの等電位面である．このことから，ある導体から出て同じ導体に入るような電気力線は存在しないことがわかる．もしそのような電気力線が存在すれば，電気力線の両端の二点は等電位であり得ず，導体表面が等電位面であることと矛盾する．

〔**注意**〕　一般に，閉曲面 S の内部に電荷が存在しなければ，S が等電位面であることと，S の内部の領域に電場が存在しないことは同等である．もし S の内部に電場があれば，その電気力線は S と二点で交わることになり，S が等電位面であることと矛盾するからである．

（vi）　導体表面上の電荷分布からは，電気力線が導体の外部へ向かって出る．導体表面は等電位面であるから，電気力線は表面と直交する．導体表面上の任意の点の電荷面密度を σ とすれば，表面上の単位面積から（表面と直角に）出る電気力管は，電束 $\varepsilon_0 E=\sigma$ を含む．したがって表面における電場は

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1.44}$$

である．

電場の一意性　　電荷分布が与えられれば，クーロンの法則（1.11）により電場が定まる．ところが導体表面上の電荷分布は，我々が勝手に指定することはできない．ある導体に電荷を与えると，その電荷は，導体内部で $\boldsymbol{E}=0$ が実現されるように導体表面上に自然に分布する．したがって我々は，導体表面

上の電荷分布とそれがつくる電場の両方を，同時に求めねばならない．これが，導体を含む問題の難しい点である．電場を求めるための方法はいろいろ工夫されているが，その際，つぎに述べる電場の一意性が重要な役割をする．

いま導体空洞 L_0 の中に，導体系 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ があるとする（図 1.22）．導体系が空洞で囲まれていない場合には，L_0 は無限遠にあるとみなす．導体 $L_i(i=1, 2, \cdots, n)$ が持つ電荷を Q_i とし，L_i と L_0 の電位差（以下ではこれを L_i の電位と呼ぶ）を Φ_i とする．我々は各導体 L_i ごとに，Φ_i と Q_i のうちの一方だけを任意の値に指定することができる．（電位 Φ_i を指定するには，L_i と L_0 を電圧 Φ_i の電池を通して結べばよい．）その結果，すべての導体の表面の電荷分布は自然に定まり，それに伴い周囲の空間の電場も定まる．（もちろん各導体の内部の電場はゼロとなる．）いいかえれば，上で指定した条件を満たし，各導体の表面を等電位面にするような電場は，一意的に定まる．この一意性の数学的な証明は省略するが，上の条件で電場が定まることは，直観的には当然であろう．

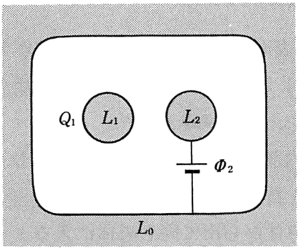


図 1.22 空洞 L_0 中にある導体系

各導体の表面を等電位面にする電場を，何等かの方法で一つ求めることができれば，それが求める電場であることが，電場の一意性によって保証される．

導体系 $L_1, \cdots, L_n$ が空洞で囲まれていない場合には，上では電位の基準として，無限遠の電位をゼロにとった．一方，実用的な立場からは，大地（またはそれに代わる大きな導体）の電位を基準にするのが便利であるが，通常は大地の電位と無限遠の電位を同一視して差しつかえない．

電気容量（i）単独の導体　導体に電荷 Q を与えたとき，この導体が持つ電位 Φ は Q に比例する．その理由をくわしくいえば次の通りである．電荷 Q は，導体内部の電場がゼロになるように表面上に分布する．導体に与える電荷 Q を λ 倍すると，導体表面上の各点の電荷密度はそのまま λ 倍になる．なぜなら，そのような電荷分布が導体内につくる電場は明らかにゼロだから，電場の一意性によりこれが正しい電荷分布である．電荷密度に比例して，導体外の各点の電場も λ 倍になる．導体の電位は，その導体から無限遠まで

電場を線積分したものであるから，これも λ 倍になる．

この比例関係を

$$Q=C\Phi \tag{1.45}$$

と表し，C をその導体の**電気容量**（electric capacity）と呼ぶ．

たとえば半径 a の球形の導体に電荷 Q を与えると，前に述べたように電荷は表面に一様に分布する．球外の電場は，球の中心に点電荷 Q があるときの電場と同一であり，これから導体の電位

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$$

が得られる．したがって導体球の容量は

$$C=4\pi\varepsilon_0 a$$

である．容量が半径に比例することに注意しよう．一般に任意の形の導体の場合にも，形の相似な導体の間では，容量は導体の寸法（半径や辺の長さなど）に比例する．（これはクーロンの法則が逆二乗法則であることから示せる．）

容量の単位は C/V であるが，これをファラッド（F）と呼ぶ．実用上はマイクロファラッド（μF$=10^{-6}$F），ピコファラッド（pF$=10^{-12}$F）がよく用いられる．

【例 1】 半径 1m の導体球の電気容量

$$C=4\pi\varepsilon_0 a=\frac{10^7}{c^2}a=1.1\times10^{-10}\,\mathrm{F}=110\,\mathrm{pF}$$

電気容量（ii）二個の導体　接近して置いた二つの導体を**コンデンサー**と呼ぶ．二つの導体にそれぞれ電荷 $Q, -Q$ を帯電させたときの，各導体の電位を Φ_1, Φ_2 とする．（i）の場合と同様に Φ_1, Φ_2 は Q に比例するので，電位差 $V=\Phi_1-\Phi_2$ と電荷 Q の間には，比例関係

$$Q=CV \tag{1.46}$$

が成り立つ．比例定数 C をコンデンサーの電気容量と呼ぶ．（i）で考えた単独の導体の電気容量は，その導体と，無限遠にある仮想的な導体から成る，コンデンサーの電気容量とみなせる．

【例 2】 平行板コンデンサー　面積 S の平面状の導体極板を二枚，間隔 d で平行に置き，それぞれに電荷 Q および $-Q$ を帯電させる．極板の寸法（$\sim\sqrt{S}$）が d にくらべて十分大きい場合を考え，極板の端の影響は無視する．電荷は，向かいあった極

板の内側の表面に，電荷密度 $\pm\sigma(\sigma=Q/S)$ で一様に分布する．実際，このような電荷分布を仮定すれば，無限に広い平面上の電荷分布がつくる電場（§ 1.3 の例3参照）の重ね合わせにより，電場は極板間の領域にのみでき，導体中の電場はゼロになる．したがってこれが正しい電荷分布である．極板間の電場は一様で，その大きさは

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

である（図 1.23）．極板間の電位差は

$$V=Ed=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}=\frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

で，これより電気容量の周知の表式が得られる：

$$C=\varepsilon_0\frac{S}{d}$$

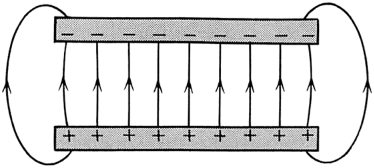


図 1.23　平行板コンデンサー

【例 3】 同心球面コンデンサー　　半径 a および $b(a<b)$ の同心の導体球面を考え，これをそれぞれ導体 1,2 と呼ぶことにする．導体 1,2 にそれぞれ電荷 Q，$-Q$ を帯電させると，電荷は二つの導体の向かい合った表面に一様に分布する．実際，球面上の電荷分布による電場（§ 1.3 の例1参照）の重ね合わせにより，上の電荷分布は二つの球面の間の領域にだけ電場をつくることがわかる．電場の方向は動径方向で，中心からの距離を r とすれば，電場の大きさは

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\qquad (a<r<b)$$

である（図 1.24）．電位差 $V=\Phi_1-\Phi_2$ は

$$V=\int_a^b E(r)dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

で，電気容量は

$$C=4\pi\varepsilon_0\Big/\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

となる．$b\to\infty$ のとき，C は単独の導体球の容量に一致する．

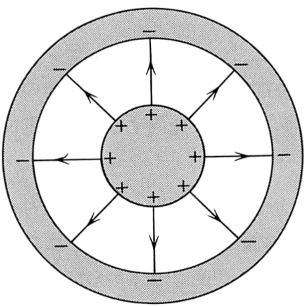


図 1.24　同心球面コンデンサー

電位係数と容量係数　　ここで問題を一般化し，任意の二つの導体 1,2 に電荷 Q_1, Q_2 を帯電させる場合を考察しよう．まず（イ）として，$Q_2=0$ のとき

の電場を考える．導体 2 の上にも，静電誘導により電荷分布が現れることに注意する（全電荷はゼロ）．導体 1, 2 の電位は Q_1 に比例するので，これをそれぞれ $D_{11}Q_1$，$D_{21}Q_1$ とおく．次に（ロ）として，$Q_1=0$ の場合を考え，そのときの導体 1, 2 の電位を $D_{12}Q_2$，$D_{22}Q_2$ とおく．この（イ）および（ロ）の場合の各導体上の電荷分布をそのまま重ね合わすと，導体 1, 2 の全電荷はそれぞれ Q_1, Q_2 となる．重ね合わせの原理により，この（イ）+（ロ）の電荷分布がつくる電場は，各導体の内部ではゼロである．したがってこの（イ）+（ロ）が，導体 1, 2 に電荷 Q_1, Q_2 を与えた場合に実現される電荷分布である．

〔**問**〕 例 2，例 3 の場合について，上に述べたことを具体的に確かめよ．

各導体の電位は，重ね合わせにより

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1&=D_{11}Q_1+D_{12}Q_2\\ \Phi_2&=D_{21}Q_1+D_{22}Q_2\end{aligned}\right\} \tag{1.47}$$

となる．これが二つの導体の電荷と電位の間の一般的関係である．上式の係数 D_{ij} をこの導体系の**電位係数**と呼ぶ．これは二つの導体の形および相対的な位置によって決まる定数である．

上の式を Q_1, Q_2 についてとけば，結果は

$$\left.\begin{aligned}Q_1&=C_{11}\Phi_1+C_{12}\Phi_2\\ Q_2&=C_{21}\Phi_1+C_{22}\Phi_2\end{aligned}\right\} \tag{1.48}$$

の形に表される．係数 C_{ij} は**容量係数**と呼ばれる．導体 2 を接地し，導体 1 の電位を 1V にするとき，導体 1, 2 に帯電する電気量が C_{11}, C_{21} である．

電位係数と容量係数には，次のような定性的性質がある（証明は省略）．

（i） $D_{12}=D_{21}$，したがって $C_{12}=C_{21}$．これは**相反定理**と呼ばれる．導体 1, 2 の大きさが無限小のときはこの性質は明らかであるが，これをもとにして，有限の大きさの導体の場合にも上の性質が導かれる．

（ii） $C_{11}>0$，$C_{22}>0$，$C_{12}=C_{21}<0$．上に述べた C_{ij} の物理的意味から考えれば，これは直観的には当然といえる．

鏡　像　法　電場を求めるいろいろな方法の中で，次の二つの例で説明するケルビン (Lord Kelvin) の**鏡像法**は，高級な数学を必要とせずに結果が得られ，しかも直観的意味が明らかである点で特にすぐれたものである．鏡像の概念は実用的にも重要である．

【例 4】 導体平面と点電荷　広い導体平面から距離 x の点 Q に，電荷 q が置か

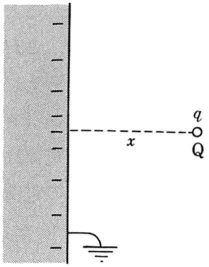


図 1.25　導体平面の近くの点 Q においた電荷 q

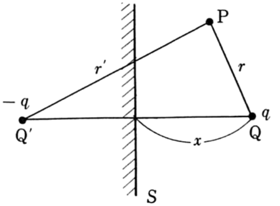


図 1.26　導体平面 S を鏡像電荷 $-q$ でおきかえる

れている．導体平面は接地されているものとする（図 1.25）．電場の源となるのは点電荷 q および導体表面に現れる誘導電荷であるが，誘導電荷の分布があらかじめはわからないので，クーロンの法則から直接電場を求めることはできない．

そこで導体平面をしばらく忘れて，間隔 $2x$ の二点 Q, Q′ にそれぞれ電荷 q, $-q$ があるとして，そのときの電場を考えてみる（図 1.26）．空間の任意の点 P に対し，$\overline{\mathrm{QP}}=\boldsymbol{r}$，$\overline{\mathrm{Q'P}}=\boldsymbol{r}'$ とすれば，点 P における電位は

$$\varphi(\mathrm{P})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\boldsymbol{r}}-\frac{1}{\boldsymbol{r}'}\right) \tag{1.49}$$

である．特に QQ′ の垂直二等分面 S の上では $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ であるから，S 上の電位は $\varphi=0$ である．そこで面 S から右の領域における電位 $\varphi(\mathrm{P})$ に注目すると，これは，点 Q に電荷 q が存在し，かつ面 S 上で $\varphi=0$ という条件を満たす電位である．ところがこの条件は，面 S を導体平面でおきかえたときに，元の問題の電位が満たすべき条件にほかならない．したがって電場の一意性により，求める電場の電位は，面 S から右の領域における電位 (1.49) により与えられる．図 1.27 に，(1.49) から求めた電気力線を示す．

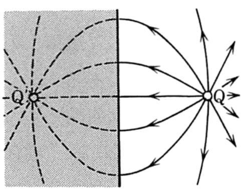


図 1.27　導体平面の近くにおいた点電荷による電場

鏡像法の考え方は重要であるから，同じ問題の別の見方を説明しておこう*．導体内外の任意の点 P の電場 $\boldsymbol{E}(\mathrm{P})$ は，点 Q の電荷 q がつくる電場 $\boldsymbol{E}_1(\mathrm{P})$ と，導体表面上の誘導電荷がつくる電場 $\boldsymbol{E}_2(\mathrm{P})$ の重ね合わせである：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$$

$\boldsymbol{E}_1$ は点 Q から等方的にでる電場であり，その電気力線は導体中にも入りこむ（図 1.28 (a)）．ところが導体中では $\boldsymbol{E}=0$ でなければならないから，$\boldsymbol{E}_2$ は導体中では $\boldsymbol{E}_1$ を相殺する．すなわち導体中の $\boldsymbol{E}_2$ は点 Q に向かって収束する電場であり，これは点 Q

*　熊谷寛夫著『電磁気学の基礎――実験室における』（裳華房）．

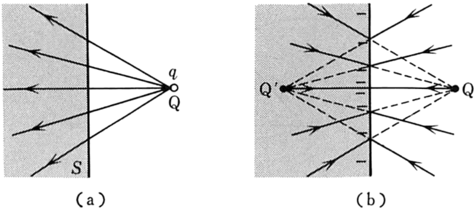


図 1.28 (a) 点電荷による電場, (b) 誘導電荷による電場

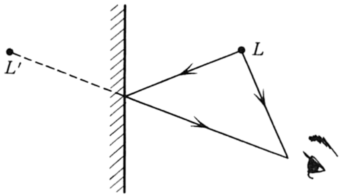


図 1.29 鏡による光の反射

に仮想的に電荷 $-q$ を置いたときの電場に等しい. 一方, $\boldsymbol{E}_2$ は導体表面上の電荷分布がつくる電場であるから, 導体表面に関し左右対称な形を持つ. そこで導体の外部における $\boldsymbol{E}_2$ は, 点 Q の対称点 Q′ に向かって収束する電場で, これは Q′ に仮想的に電荷 $-q$ を置いたときの電場に等しい (図 1.28(b)). 結局導体の外部では, 電場 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$ は点 Q と Q′ にそれぞれ電荷 q と $-q$ があるときの電場に等しいが, これはまさに, 電位 (1.49) が表す電場にほかならない.

鏡の前に光源 L があるとき, 我々の眼に入る光は, L から直接来る光と, 一度鏡で反射されて来る光の重ね合わせであるが, 後者はあたかも, L の鏡像 L′ から来る光のように見える (図 1.29). これと同様に, 電場 $\boldsymbol{E}_2$ は本来は導体表面上の誘導電荷がつくるものであるが, 導体外の領域で見ると, あたかも点 Q′ にある鏡像電荷 $-q$ がつくる電場のように見える. これが鏡像法という名前の由来である.

【例 5】 導体球と点電荷　半径 a の導体球の近くの点 Q に, 電荷 q を置く. 導体球の中心 O から点 Q への距離を $\overline{\mathrm{OQ}}=b$ $(b>a)$ とする. 導体球は接地されているとしよう.

直線 OQ 上にある球内の点 Q′$(\overline{\mathrm{OQ'}}=c)$ を, $b:a=a:c$ を満たすようにとる. Q と Q′ を, 球面に関してたがいに**共役な点**と呼ぶ. 球面上の任意の点 F に対し, 三角形 QOF と FOQ′ は相似であるから, Q′F と QF の比は F の位置によらずに一定である (図 1.30):

$$\frac{\mathrm{Q'F}}{\mathrm{QF}}=\frac{c}{a}=\frac{a}{b}\equiv k$$

逆に, 二点 Q と Q′ からの距離の比が $1:k$ である点の軌跡は球面 (アポロニウス

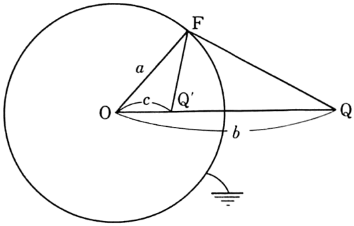


図 1.30 球面に関し共役な点 Q, Q′

の球面）で，それが導体球の表面である．

前と同様に，まず導体球を取り除き，点 Q′ に電荷 $-kq$ を置いてみる．二点 Q, Q′ にある電荷 $q, -kq$ が任意の点 P につくる電位は，$\overline{\mathrm{QP}}=r$，$\overline{\mathrm{Q'P}}=r'$ とすれば

$$\varphi(\mathrm{P})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{k}{r'}\right) \tag{1.50}$$

である（図 1.31）．特に $r:r'=1:k$ を満たす球面 S の上では，電位は $\varphi=0$ である．そこで球面 S の外部の領域における $\varphi(\mathrm{P})$ のふるまいを見ると，点 Q に電荷 q があり，球面 S の上で $\varphi=0$ の条件を満たしているが，これは元の導体球の問題で，球外の電位が満たすべき条件にほかならない．したがって電場の一意性から，求める電場の電位は，球外の領域における（1.50）により与えられることがわかる．導体球の表面に誘導される電荷分布は，球外から見ると，あたかも点 Q′ にある鏡像電荷 $-kq$ のように見えるのである．電位（1.50）から求まる電気力線を，図 1.32 に示す．

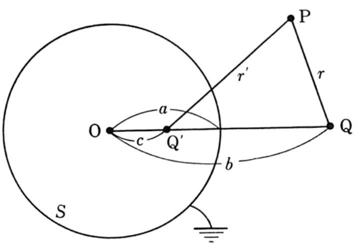


図 1.31 導体球と点電荷

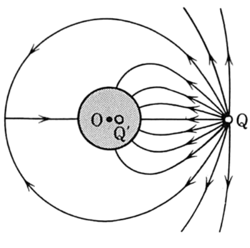


図 1.32 接地した導体球の近くにおいた点電荷による電場

静電遮蔽（しゃへい） 接地した無限に広い導体板によって，空間を二つの領域に分ける．図 1.33 の導体板の右側の領域（領域 1）に電荷があれば，この領域に面した導体表面 S_1 上に誘導電荷が分布し，例 4 で説明したような電場が領域 1 にできる．この電場は表面 S_1 の左側ではゼロで，導体板の左側の領域

（領域２）には及ばない．同様に領域２に電荷があれば，導体板の左側表面 S_2 上に誘導電荷が分布し，領域２に電場ができる．この電場は S_2 から右ではゼロで，領域１には及ばない．

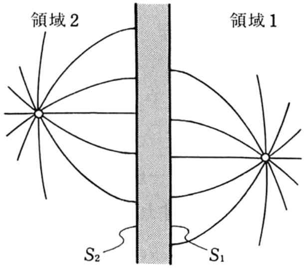


図 1.33 静電遮蔽

導体板の両側に電荷があるときには，上の二つの電場を重ね合わせた電場ができる．したがって，領域１の電場は領域１内の電荷のみによって定まり，領域２の電荷からの影響は受けない．領域２の電場についても同様である．こうして導体板でへだてられた二つの領域は，静電気的には全く独立になる．

空間の一部を導体で囲って空洞をつくった場合も事情は同様で，空洞の外部の静電場は空洞の内部には及ばない．このように，導体で空間を囲って外部からの静電気的な影響を遮断することを，**静電遮蔽**という．

§ 1.6 電場のエネルギー

ある電荷分布が持つエネルギー（**静電エネルギー**）は，その電荷分布をつくりあげるのに要する仕事に等しい．最初に簡単な例を一つあげておこう．

コンデンサーのエネルギー　二つの導体の電荷を $Q, -Q$ とし，導体間の電位差を V とする．導体が帯電していない状態からこの状態をつくるには，一方の導体から他方の導体へ電荷を少しずつ運べばよい．その途中で，二つの導体の電荷が

$$\pm Q(\lambda) = \pm \lambda Q \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

のときを考えると，導体間の電位差は

$$V(\lambda) = \lambda V$$

である．（この理由は前節で述べた．）ここでさらに $dQ = Qd\lambda$ の電荷を運ぶのに要する仕事は

$$V(\lambda)\,dQ = QV\lambda d\lambda$$

であるから，$\pm Q$ の帯電までに必要な仕事は

$$U = \int_0^Q V(\lambda)\,dQ = QV\int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2}QV \qquad (1.51)$$

である．これはコンデンサーのエネルギーとして周知の結果である．

点電荷の分布 一般に，点電荷 $q_1, q_2, \cdots$ が点 $P_1, P_2, \cdots$ に分布しているときのエネルギーを考える．この電荷分布をつくるには，無限遠から電荷 $q_1, q_2, \cdots$ を点 $P_1, P_2, \cdots$ へ順に運んでくればよい．何も無い空間へ q_1 を運ぶのには仕事はいらない．次にこの q_1 がつくる電場の中で，q_2 を無限遠から点 P_2 まで運ぶ．一般に点 P_i に置いた電荷 q_i が点 P_j につくる電位を $\varphi_i(P_j)$ と表すことにすれば，q_2 を点 P_2 まで運ぶのにいる仕事は $q_2\varphi_1(P_2)$ である．さらに，q_1 と q_2 がつくる電場の中で，q_3 を点 P_3 まで運ぶ．それに要する仕事は $q_3(\varphi_1(P_3)+\varphi_2(P_3))$ である．以下これをくり返していけば，全体で要する仕事は

$$U=\sum_{\substack{i,j\\(i<j)}} q_j\varphi_i(P_j)$$

である．$q_j\varphi_i(P_j)$ は二つの電荷 q_i と q_j の間のポテンシャルエネルギーであるから

$$q_j\varphi_i(P_j)=q_i\varphi_j(P_i)$$

が成り立ち，これを用いれば上の結果を

$$U=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\(i\neq j)}} q_j\varphi_i(P_j)$$

と書き変えることができる．さらに，q_j 以外の電荷が点 P_j につくる電位を

$$\varphi(P_j)=\sum_{\substack{i\\(i\neq j)}} \varphi_i(P_j)$$

で表せば，

$$U=\frac{1}{2}\sum_j q_j\varphi(P_j) \tag{1.52}$$

と書くこともできる．$\varphi_i(P_j)$ の具体的な表式を代入すれば，$\overline{P_iP_j}=r_{ij}$ として

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i,j\\i<j}}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \tag{1.53}$$

である．これは，万有引力を及ぼし合う質点系のポテンシャルエネルギーと同じ形の表式である．

連続的な電荷分布 電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ で電荷が連続的に分布している場合の静電エネルギーは，(1.52) で q_j を ρdV でおき代え，和を積分に変えれば

$$U=\frac{1}{2}\int\varphi\rho dV \tag{1.54}$$

と表される．もちろんこの結果は，コンデンサーのエネルギーの場合と同様に，各点の電荷密度を

$$\rho(\boldsymbol{r},\lambda)=\lambda\rho(\boldsymbol{r}) \qquad (0\leqq\lambda\leqq 1)$$

の形で一様に増加させる過程を考えれば，直接導くこともできる．

【例 1】 導体に働く力　電場の中にある導体に働く力は，エネルギーの表式から仮想変位の方法を用いて導くことができる．これはもちろん，質点に働く力がポテンシャルエネルギー $U(\boldsymbol{r})$ から

$$\boldsymbol{F}=-\nabla U$$

により導かれることの一般化である．ここでは簡単な例として，平行板コンデンサーの極板が受ける力を考えよう．

一方の極板が電場から受ける力を F とする．この力に逆らって極板をとめておくには，外力 $F_{\mathrm{ext}}=-F$ を加える必要がある．この平衡状態を保ちながら，仮想的に極板を δx だけ引き離すことを考える（図 1.34）．そのとき外力の行う仕事は $-F\delta x$ で，これはコンデンサーのエネルギー U の増加となる．すなわち

$$-F\delta x=\delta U \tag{1.55}$$

である．

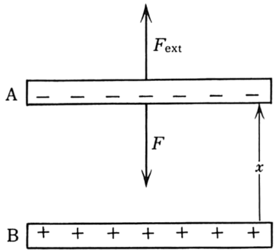


図 1.34　コンデンサーの極板に働く力

コンデンサーのエネルギー

$$U=\frac{1}{2}QV=\frac{Q^2}{2C}$$

において，電荷 Q は仮想変位の際一定に保たれるので，U の変化は

$$\delta U=\frac{1}{2}Q^2\delta\left(\frac{1}{C}\right)$$

である．極板間隔を x，極板の面積を S とすれば容量は $C=\varepsilon_0 S/x$ であるから，上式は

$$\delta U=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\delta x=\frac{1}{2}EQ\delta x$$

となり，(1.55) より

$$F=-\frac{1}{2}EQ$$

を得る．負の符号は，力 F が間隔 x の減少する方向に働くことを意味する．

二枚の極板を A, B とすれば，A が受ける力 F は，A 上の電荷分布が受ける力の合力である．A 上の電荷分布は A および B の上の電荷分布から力を受けるが，前者の合力は作用反作用の法則により消える．したがって F は，A 上の電荷 $-Q$ が B のつ

くる電場 $E/2$ から受ける力に等しい．これが上の結果の物理的な解釈である．

電場のエネルギー密度　二粒子間に働く万有引力のポテンシャルエネルギーは，この粒子対に属するのであって，それ以上に，このエネルギーがどこに存在するのかと問うのは無意味に見える．しかし二粒子がばねで結ばれて力を及ぼし合うときは，そのポテンシャルエネルギーは，ばねの中に弾性エネルギーとして分布していると見るのが自然であろう．前者は，有限距離はなれた物体に力が直接に及ぶという遠隔作用の見方であり，後者は，接し合っている物体間の作用を通して力が伝わるという近接作用の見方である．

電荷の間の静電気力は万有引力と同じ形を持つので，ニュートン力学に慣れた眼で見れば，これは当然遠隔作用に見える．しかしファラデイ (Faraday) の天才的直観は，これを近接作用ととらえた．ファラデイとマックスウェルによれば，電場や電気力線は単に電気力の記述のための補助手段ではなく，れっきとした物理的実体である．電気力管には，長さを縮め，断面を広げようとする性質があり，電気力管の各部分はそのような張力や圧力を及ぼし合う．この張力や圧力を通して電荷間の静電気力が伝えられるというのが彼等の見方である．静電場を問題にする限りでは，このファラデイ流の考えは一つの興味ある観点というのにとどまり，それをとる必然性は無い．しかし後の章で見るように，時間変化する電磁場，特に電磁波の問題に進むと，近接作用の見方が必然的となる．

静電気力が近接作用によるものならば，静電エネルギーは，電場と共に空間に連続的に分布しているはずである．以下では，そのような見方が矛盾なくできるかどうかを調べてみよう．

まず，極板の面積 S，極板間の間隔 d の平行板コンデンサーの電場を考える．端の付近を除けば，電場は極板間の領域に一様な強さでできるので，その大きさを E とすれば，極板間の電位差は

$$V=Ed$$

であり，極板に帯電する電荷を $\pm Q$ とすれば，

$$Q=\varepsilon_0 ES$$

である．これを静電エネルギーの式 (1.51) に代入すれば

$$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd$$

となる．極板間の領域の体積が Sd であるから，この結果は，エネルギーが電場と共に密度

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 \tag{1.56}$$

で連続的に分布する，と解釈することができる．

この解釈が一般的に成り立つならば，静電エネルギーは，エネルギー密度 u の体積積分

$$U=\int udV=\int\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2dV \tag{1.57}$$

の形に常に表されるはずである．これを確かめるために，一般に二つの導体 1, 2 がそれぞれ電荷 Q および $-Q$ を帯電している場合を調べてみよう．この例では，すべての電気力線は導体 1 の正電荷から出て，導体 2 の負電荷に達する．電気力線を適当な束に分ければ，導体外の全空間は電気力管で埋めつくされる．まず一本の電気力管をとり，その中でエネルギー密度 (1.56) を積分しよう：

$$\int_{\text{電気力管}} udV=\frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2dSdl$$

右辺では電気力管の微小体積 dV を，電気力線に沿う長さ dl と，その点での管の断面積 dS により，$dV=dSdl$ と表した（図 1.35）．

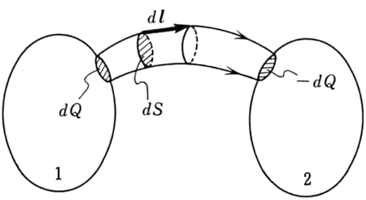


図 1.35　電気力管の体積要素

さて，電気力管を通る電束 $\varepsilon_0 EdS$ は電気力管のどこでも一定で，その管の端にある導体 1 上の電荷 dQ に等しい．そこで上の体積積分からこの因子を抜き出せば

$$\int_{\text{電気力管}} udV=\frac{1}{2}dQ\int_1^2 Edl=\frac{1}{2}dQ(\Phi_1-\Phi_2)$$

を得る．ここで

$$\Phi_1-\Phi_2=\int_1^2 Edl$$

は二つの導体の電位差である．上の結果をすべての電気力管について加えれば，全空間でのエネルギー密度 u の積分が得られる．ところが電位差 $\Phi_1-\Phi_2$ はすべての電気力管について共通であるから，和は導体1の上での dQ の和に帰着し，これは導体1の全電荷 Q になるから

$$\int_{\text{全空間}} udV=\frac{1}{2}Q(\Phi_1-\Phi_2)$$

を得る．これはコンデンサーのエネルギー（1.51）にほかならない．

導体の数がもっと多い場合にも，エネルギー密度の全空間にわたる積分を，空間を電気力管に分けて実行できる．その結果は，導体 $i(i=1,2,\cdots)$ の電荷を Q_i，電位を Φ_i とするとき

$$U=\int udV=\frac{1}{2}\sum_i Q_i\Phi_i \tag{1.58}$$

となる．容易にわかるように，これは（1.54）と同等である．こうして，電場が密度（1.56）のエネルギー分布を伴うという解釈が，一般に可能であることがわかった．

静電エネルギー U の表式（1.57）から，U が常に正であることがわかる．すなわち，電荷分布の無い状態から電荷分布をつくり上げるには，常に正の仕事を要するのである．

〔**注意**〕 静電エネルギーの二つの表式（1.54）と（1.57）が等価であるのは，電荷分布が連続的な場合に限る．実際，点電荷の分布の場合には，その静電エネルギー（1.53）は常に正とは限らず，上に述べたことと矛盾する．前の説明では，点電荷の分布の場合の（1.52）から連続的な電荷分布の場合の（1.54）へ，静電エネルギーの表式が自然に移行するように見えたが，実はそこに飛躍があり，それが上の矛盾の原因である．その飛躍が何かは，読者自ら考えてほしい．

【例 2】 原子核の静電エネルギー 半径 a の球の内部に，一様な電荷密度で電荷 Q が分布しているとき，この電荷分布が持つ静電エネルギーは

$$U=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5a}$$

である．この結果は，公式（1.54）あるいは（1.57）のどちらを使っても得ることができるが，ここでは後者を用いて導こう．

球対称性から電場は動径方向を向き，その大きさ E は中心からの距離 r のみによる．したがってエネルギー密度の積分は

$$U=\int\frac{\varepsilon_0}{2}E(r)^2dV=\frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\int_0^\infty E(r)^2r^2dr$$

となる．$E(r)$ は § 1.3 の例 2 で求めてあるのでこれを代入すれば

$$U=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a^6}\int_0^a r^4dr+\int_a^\infty\frac{1}{r^2}dr\right]=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5a}$$

が得られる．

上の結果を用いて，原子核の静電エネルギーを評価しよう．原子番号 Z，質量数 A の原子核は，Z 個の陽子と $A-Z$ 個の中性子から成る．原子核の形は，おおまかにいえば，半径

$$a=r_0A^{1/3},\quad r_0\fallingdotseq 1.2\times10^{-15}\,\mathrm{m}$$

の球であることが，実験からわかっている．電子の電荷の大きさを q_e($q_e=1.6\times10^{-19}$C) とすれば，原子核は電荷 Zq_e を持つが，この電荷は球内に一様な電荷密度で分布しているとみなせる．したがって原子核は静電エネルギー

$$U=\frac{3}{5}\frac{q_e{}^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z^2}{r_0A^{1/3}}$$

を持つ．U/q_e は電位の次元を持つ量で，これが 1V のとき，対応するエネルギー U の値を 1 電子ボルト (eV) という．KeV($=10^3$eV)，MeV($=10^6$eV) 等の単位もよく用いられる．上式に q_e, r_0 の数値および $1/4\pi\varepsilon_0\fallingdotseq 9\times10^9\,\mathrm{m/F}$ を代入すれば

$$U=0.72\frac{Z^2}{A^{1/3}}\,\mathrm{MeV}$$

となる．実在する原子核では質量数 A は原子番号 Z にほぼ比例するので，U は $A^{5/3}$ に比例する．したがって一核子（陽子または中性子）当たりの静電エネルギー U/A は A と共に増加する．

ウランなどの原子核が，A のほぼ等しい二つの原子核に分裂すると，余った静電エネルギーが放出される．これが原子エネルギーにほかならない（問題 1.20 参照）．

§ 1.7　静電場の法則の微分形

静電場の基礎法則であるクーロンの法則が，二つの法則

$$\varepsilon_0\int_S E_ndS=\int_V\rho dV \tag{1.59}$$

$$\oint_C E_tdl=0 \tag{1.60}$$

と等価であることを § 1.4 で学んだ．ここで S は任意の閉曲面，V はその内部の領域，C は任意の閉曲線である．また E_n は S の外向き法線方向への $\boldsymbol{E}$ の成分，E_t は C の接線方向への $\boldsymbol{E}$ の成分である．これらの法則は積分の形で表されているが，これを，空間の一点における電場や電荷密度だけで表す

形，すなわち局所的（local）な形に書き直すことができれば，いちいち積分をするわずらわしさから解放され，見通しも良くなるであろう．本節ではそのような書き換えを試みる．

上の二つの法則は任意の S や C について成り立つのだから，特に微小な S や C についてこれを書いてみれば，局所化の目的は達せられるであろう．その際，微小な S や C の形は我々に都合のいいようにえらぶことができる．

ガウスの法則　一般にベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ が与えられたとき，微小な閉曲面 S について，面積分

$$\int_S v_n dS$$

を計算しよう．$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ が流体の速度場のときは，これは閉曲面 S から外へ出る流量を表す．簡単のため，各辺が x 軸，y 軸，z 軸に平行で，その長さが $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ である微小な直方体をとり，その表面を S とする．直方体の一つの頂点の座標を（x, y, z）とする（図 1.36）．

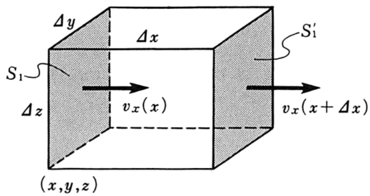


図 1.36 微小な直方体の表面

面積分は直方体の六つの面に分けて行う．まず yz 平面に平行な二つの面 S_1 と S_1' について考える．面 S_1 上では x 座標は一定値 x をとり，面 S_1' 上では一定値 $x+\Delta x$ をとる．面 S_1' の上では $\boldsymbol{v}$ の外向き法線方向成分は v_x であるから，S_1' を通って外へ出る流量は

$$\int_{S_1'} v_x(x+\Delta x, y', z')dy'dz'$$

である．$\Delta y, \Delta z$ が小さければ S_1' 上における v_x の変化は無視できるので，上の積分は $v_x(x+\Delta x, y, z)\Delta y\Delta z$ と近似できる．同様に面 S_1 を通って直方体の中に入る流量は $v_x(x, y, z)\Delta y\Delta z$ であるから，この二つの面から外へ出る流量は，差し引き

$$[v_x(x+\Delta x, y, z)-v_x(x, y, z)]\Delta y\Delta z$$

である．Δx について一次までとれば，これは

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z=\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta V$$

となる．ここで $\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$ は直方体の体積で，また偏微分 $\partial v_x/\partial x$ は，点 (x, y, z) における値をとるものとする．

同様にして xz 平面に平行な二つの面，および xy 平面に平行な二つの面から外へ出る流量はそれぞれ

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta V \quad , \quad \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta V$$

であるから，六つの面の寄与を加えれば，面積分は

$$\int_S v_n dS=\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\Delta V$$

となる．右辺の括弧の中の量は，ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ の**発散** (divergence) と呼ばれる量で，$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ あるいは $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$ という記号で表される．$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ という記号は，この量が微分演算子

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

とベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ のスカラー積であることを表している：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\nabla_x v_x+\nabla_y v_y+\nabla_z v_z=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1.61}$$

この記号を用いれば，上の面積分は

$$\int_S v_n dS=\nabla\cdot\boldsymbol{v}\Delta V \tag{1.62}$$

と表される．この式からわかるように，発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ は，単位体積から外へ出る流量という意味を持つ．

この結果をガウスの法則 (1.59) に適用しよう．面 S として上の直方体の表面をとれば，(1.59) の左辺は $\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}\Delta V$ となる．(1.59) の右辺の体積積分は（いまの近似では直方体内部での ρ 変化は無視できるので）単に $\rho(x, y, z)\Delta V$ とおける．したがって (1.59) は

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho \tag{1.63}$$

と表される．この両辺は点 (x, y, z) における量のみで表されているので，これが我々が目的とした局所的な形である．(1.63) はガウスの法則の微分形と呼ばれる．上式をていねいに書けば

$$\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)=\rho \qquad (1.63')$$

であり，これは $\boldsymbol{E}$ の成分が満たすべき偏微分方程式である．

〔問〕 §1.3 の例2の電場の成分をデカルト座標で表し，(1.63) が成り立つことを確かめよ．

電場の渦無しの法則　つぎに (1.60) に移る．ここでもまず，一般のベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ について，平面上の微小な閉曲線 C に沿った循環

$$\oint_C v_l dl=\oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}$$

を計算しよう．循環はスカラー量であるから，都合のよい座標軸をとってこれを計算して，その結果を座標軸のとり方によらない形に書き直せばよい．ここでは閉曲線 C が乗っている平面を xy 平面にとる．閉曲線 C に向きをつけ，C を縁とする微小な面の法線 $\boldsymbol{n}$ を，右ねじの規則に従う向き（C の向きに右ねじを廻したとき右ねじが進む向き）にとる．この法線 $\boldsymbol{n}$ の方向に z 軸をとることにする．

閉曲線 C として，x 軸および y 軸に平行な辺を持つ微小な長方形を考え，一つの頂点の座標を (x,y)，辺の長さを Δx, Δy とする（図 1.37）．図の辺 1, 1′ の上では y 座標がそれぞれ一定値 y, $y+\Delta y$ をとり，辺 2, 2′ の上では x 座標がそれぞれ一定値 $x+\Delta x$, x をとることに注意する．

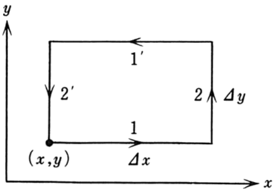


図 1.37　微小な積分路

辺1の上では接線方向成分 v_l は v_x に等しいので，線積分は

$$\int_1 v_l dl=\int_x^{x+\Delta x} v_x(x',y)dx'$$

となる．辺 1′ の上の線積分は，積分の向きを逆にとって符号を変えればよいから

$$\int_{1'} v_l dl=-\int_x^{x+\Delta x} v_x(x',y+\Delta y)dx'$$

と表される．両者の和

$$\int_{1+1'} v_l dl=-\int_x^{x+\Delta x}[v_x(x',y+\Delta y)-v_x(x',y)]dx'$$

において，$\varDelta y$ について一次までの項をとれば

$$\int_{1+1'} v_l dl = -\int_x^{x+\varDelta x} \frac{\partial v_x}{\partial y}(x', y)\varDelta y dx'$$

となる．微小量 $\varDelta x, \varDelta y$ についてそれぞれ一次までとる近似では，被積分関数の x' による変化は無視できるので，

$$\int_{1+1'} v_l dl = -\frac{\partial v_x}{\partial y}(x, y)\varDelta x \varDelta y = -\frac{\partial v_x}{\partial y}\varDelta S$$

と近似できる．$\varDelta S = \varDelta x \varDelta y$ は長方形の面積である．

同様に辺 2 と 2′ の上の線積分は

$$\int_{2+2'} v_l dl = \frac{\partial v_y}{\partial x}\varDelta S$$

となるので，上の二つの結果を加えれば，微小閉曲線 C に沿う循環

$$\int_C v_l dl = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\varDelta S \tag{1.64}$$

が得られる．

この結果を座標軸のとり方によらない形に表すために，まず，ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ の**カール**（curl）または**回転**と呼ばれるベクトル場を導入する．これは微分演算子 ∇ とベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ のベクトル積 $\nabla\times\boldsymbol{v}$ として定義されるベクトル場である．ベクトル積の定義に従ってその成分を書けば

$$\left.\begin{aligned}
(\nabla\times\boldsymbol{v})_x &= \nabla_y v_z - \nabla_z v_y = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\
(\nabla\times\boldsymbol{v})_y &= \nabla_z v_x - \nabla_x v_z = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\
(\nabla\times\boldsymbol{v})_z &= \nabla_x v_y - \nabla_y v_x = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{1.65}$$

である．$\nabla\times\boldsymbol{v}$ の代りに $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}$ または $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ という記号も用いられる．

さて，(1.64) の右辺の括弧の中は $(\nabla\times\boldsymbol{v})_z$ にほかならないが，さらに閉曲線 C が囲む面の法線 $\boldsymbol{n}$ が z 方向を向くことを思い出せば，(1.64) は

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\varDelta S \tag{1.66}$$

と表せることがわかる．これはもはや座標軸のとり方によらない表式である．ここでは C が微小な長方形の場合に上の結果を導いたが，実はこの結果は，任意の形の微小な閉曲線 C に対しても成り立つ．

この結果はまた，$\nabla\times\boldsymbol{v}$ というベクトルの直観的な意味を教えてくれる．面

積 ΔS の微小な面をいろいろな方向に向けて，その面の周 C に沿う $\boldsymbol{v}$ の循環を計算する．法線 $\boldsymbol{n}$ がある方向 $\boldsymbol{n}_0$ を向くとき循環の値が最大値 Γ になるならば，$\boldsymbol{n}_0$ がその点における $\nabla\times\boldsymbol{v}$ の方向であり，$\Gamma/\Delta S$ が $\nabla\times\boldsymbol{v}$ の大きさを与える．簡単にいえば，$\nabla\times\boldsymbol{v}$ は単位面積当たりの循環にほかならない．面積が本質的にベクトル量であるから，$\nabla\times\boldsymbol{v}$ もベクトルなのである．$\nabla\times\boldsymbol{v}$ がゼロでなければ，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の中に，$\nabla\times\boldsymbol{v}$ の方向を軸とする渦が含まれている．

ここで (1.60) に戻る．C として微小な閉曲線（たとえば長方形）をとれば，(1.60) の左辺の線積分は上の結果により $(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{n}\Delta S$ となる．したがって (1.60) は

$$(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{n}=0$$

と表される．(1.60) は任意の閉曲線 C に対して成り立つ関係であるから，上式も任意の $\boldsymbol{n}$ に対して成り立つ．それゆえ，ベクトル式として

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \tag{1.67}$$

が成り立つことになる．成分で書けば，上式は

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0 \tag{1.67$'$}$$

という三つの式で表される．(1.67) は，静電場が渦無しであることを表す．

本節の結果をまとめれば，静電場の基礎法則が，局所的な二つの式 (1.63)，(1.67) で表されたわけである．

ポアッソンの方程式 (1.67) は，静電場が電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の勾配として

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$$

と表されることと等価である．この形をガウスの法則 (1.63) に代入すれば，電位に対する式

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\nabla\varphi=-\rho$$

すなわち

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.68}$$

が得られる．ここで ∇^2 は

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.69}$$

で定義される微分演算子で，**ラプラシアン**と呼ばれる．(1.68) を**ポアッソン**

(Poisson) **の方程式**という．

ガウスの定理　最後に，ベクトル解析のガウスの定理とストークス (Stokes) の定理について，簡単にふれておこう．ガウスの定理は，微小体積について導いた公式(1.62)を，有限体積に一般化したものである．任意の閉曲面 S の内部 V を二つの領域 V_1, V_2 に分割し，それぞれの表面を S_1, S_2 とすれば，S から外へ出る流量は，S_1, S_2 から外へ出る流量の和に等しい（図 1.38）：

$$\int_S v_n dS = \int_{S_1} v_n dS + \int_{S_2} v_n dS$$

なぜならば，S_1, S_2 を V の表面 S に含まれる部分と V の内部にある部分 S' に分けると，S' を通って V_1 から出る流量はそのまま V_2 の中へ入るので，両者は上式の右辺の和で相殺されるからである．この分割をくりかえして V を微小体積に分ければ，S から外へ出る流量を，各微小体積から出る流量の和として表すことができる．ところで微小体積からの流量に対しては (1.62) が成り立つので，その和は体積積分

$$\int_S v_n dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} dV \tag{1.70}$$

で表される．これが**ガウスの定理**である．

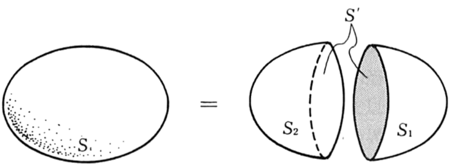


図 1.38　閉曲面 S を二つの閉曲面 S_1, S_2 に分割する

ストークスの定理　微小な閉曲線に沿う循環の公式 (1.66) を，有限の大きさの閉曲線に一般化したものがストークスの定理である．任意の閉曲線 C を周とする曲面 S を二つの部分 S_1, S_2 に分け，それぞれの周を C_1, C_2 とすれば，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の C に沿う循環は C_1 と C_2 に沿う循環の和に等しい（図 1.39）：

$$\oint_C v_l dl = \int_{C_1} v_l dl + \int_{C_2} v_l dl$$

なぜならば，C_1 と C_2 のうち C に含まれていない部分の寄与は，図 1.39 から明らかなように，上式の右辺の和で相殺するからである．この分割をくりかえして曲面 S を微小面積に分ければ，C に沿う循環は各微小面積の周に沿う循環の和として表される．微小面積の周に沿う循環は (1.66) の形に書けるので，その和は S 上の面積分

$$\oint_C v_l dl = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{v})_n dS \tag{1.71}$$

となる．S は C が張る任意の曲面で，$\boldsymbol{n}$ は S 上の各点における法線，$(\nabla \times \boldsymbol{v})_n$ は $\nabla \times \boldsymbol{v}$ の法線方向成分である．法線 $\boldsymbol{n}$ の向きは C の向きから右ねじの規則に従って定

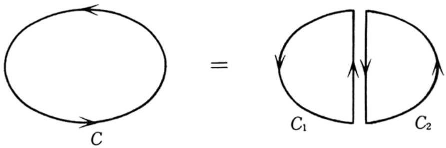


図 1.39 閉回路 C を二つの閉回路 C_1, C_2 に分割する

める．(1.71) を**ストークスの定理**と呼ぶ．

ストークスの定理とガウスの定理は，積分は微分の逆演算であるという微積分学の基本定理を，二次元積分，三次元積分に対して言い表したものにほかならない．

問 題

1.1 二つの陽子の間に働くクーロン力と万有引力の比を求めよ．陽子の電荷は $1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，質量は $1.672\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$，万有引力定数は $6.673\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$ である．

1.2 地球表面には約 100 V/m の下向きの電場がある．地球に帯電する全電荷はどれだけか．地球の半径は約 6400 km である．

1.3 空気中に或る強さ以上の電場があると，空気がイオン化され放電が起きてしまう放電が起きない限界の電場の強さを空気の絶縁耐力と呼び，その値は 30 kV/cm の程度である．空気中で導体球の電位を 100 kV まで上げるためには，球の半径をどれだけ以上にとらなければならないか．

1.4 無限に長い直線上に，単位長さ当たり λ の電荷密度で電荷が一様に分布している．このときできる電場をガウスの法則を用いて求めよ．

1.5 前問の電場を，クーロンの法則から直接求めよ．

1.6 半径 a の無限に長い円筒面の上に，面密度 σ で電荷が一様に分布している．いかなる電場ができるか．

1.7 xy 面上で原点を中心とする半径 a の円周の上に，一様な線密度で電荷が分布している．その全電荷を Q とする．z 軸上の任意の点の電位および電場を求めよ．

1.8 xy 面上で原点を中心とする半径 a の円板上に一様な面密度で電荷 Q が分布している．z 軸上の電位および電場を求めよ．$z\to\infty$ および $z\to0$ で，電場はいかなる値に近づくか．

1.9 半頂角 θ の円錐の頂点が底面に対して張る立体角は，$2\pi(1-\cos\theta)$ であることを示せ（次ページ図 1.40）．［ヒント］θ が $d\theta$ だけ増すときの立体角の増加分を求め，それを積分する．

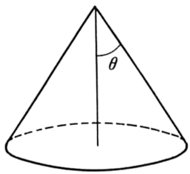


図 1.40

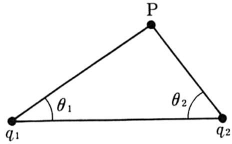


図 1.41

1.10 二つの点電荷 q_1 および q_2 がつくる電場の電気力線は，図 1.41 の角 θ_1, θ_2 を用いれば方程式 $q_1\cos\theta_1 - q_2\cos\theta_2 =$ 一定 で表されることを示せ．

1.11 前問で，（イ） $q_2 = -q_1$ （ロ） $q_2 = -4q_1$ の二つの場合について電気力線を画け．

1.12 10 枚の金属板を等間隔で平行に並べ，1 枚おきに交互に結んだコンデンサーがある．1 枚の金属板の面積を 4 cm²，金属板の間隔を 1 mm とするとき，このコンデンサーの電気容量を求めよ．

1.13 半径 a および b の二つの導体球が，長い導線で結ばれている．この導体系に電荷を与えるとき，（イ）二つの導体球に分配される電荷の比（ロ）二つの球の表面における電場の大きさの比を求めよ．

1.14 中心軸を共有する半径 a および $b(a<b)$ の二つの導体円筒からなるコンデンサーがある．円筒の長さ l は a, b にくらべ十分に大きいとして電気容量を求めよ．

1.15 直径 2 cm の真ちゅう円筒の中心軸に直径 0.1 mm のタングステン線を張ったガイガーミュラー計数管がある．円筒と中心線の間に 1000 V の電圧を加えるとき，中心線のすぐ外側の電場はどれだけになるか．

1.16 半径 a および $b(a<b)$ の二つの同心の導体球面からなるコンデンサーについて，電位係数および容量係数を求め，相反性を確かめよ．

1.17 半径 a および $b(a<b)$ の同心球面コンデンサーに電荷 $Q, -Q$ が帯電しているときの静電エネルギーを，電場のエネルギー密度の積分により求めよ．

1.18 極板間隔 1 mm の平行板コンデンサーが電位差 1000 V に帯電しているとき，極板に働く力は 1 cm² 当たり何グラム重か．

1.19 無限に広い導体平面から距離 x の所に点電荷 q がある（§ 1.5 例 4）．

（イ） 導体平面上に現れる誘導電荷の面密度およびその総量を求めよ．

（ロ） 電荷 q にはいかなる力が働くか．

（ハ） この電荷を無限遠から上記の位置まで運ぶのに要する仕事を求めよ．

（ニ） （ハ）の結果が，距離 $2x$ 離れた二つの電荷 $q, -q$ の静電エネルギーと異なるのはなぜか．

1.20 原子番号 92，質量数 236 のウラン原子核が原子番号，質量数の等しい二つの原子核に分裂するとすれば，どの程度の静電エネルギーが放出されるか．

1.21 原子核に陽子が衝突して核反応を起こすためには，陽子は原子核から受けるクーロン斥力にさからって原子核の表面まで到達する必要がある．$^{27}_{13}$Al 原子核に陽子をあてて核反応を起こすには，陽子に何 eV の運動エネルギーを与えねばならないか．

1.22 接地された半径 a の導体球の中心から距離 b の点に，点電荷 q を置く（§1.5 例4）．

（イ） 球面上の点 P（図 1.42）の電荷面密度を求めよ．

（ロ） 球面上に誘導される全電荷はどれだけか．

（ハ） 点電荷が受ける力を求めよ．

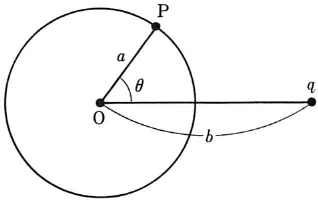


図 1.42

1.23 前問で導体球が接地されていない場合には，どのような電場ができるか．導体球は帯電していないものとする．

1.24 無限に広い導体平面から距離 x の所に，平面と平行な無限に長い直線がある．直線上に線密度 λ で電荷が一様に分布するとき，どのような電場ができるか．等電位面はどのような形になるか．

1.25 導体平面から 1cm 離れた所に直径 1mm の針金を平面と平行に張る．針金と導体平面の間の電気容量は針金 1cm 当たりどれだけか．

第2章　定 常 電 流

§ 2.1　オームの法則

時間的に一定な電流を**定常電流**（stationary current）という．本章では，主に後の章で必要になる範囲で，電流に関する基礎的な事実を説明する．

電 流 密 度　　導線を電流が流れるとき，導線の断面を単位時間に通過する電気量を，電流の強さという．電流の単位は C/s で，これをアンペア（A）と呼ぶ．断面積 S の導線に電流 I が流れるとき，単位面積当たりの電流 $j=I/S$ を**電流密度**（current density）という．より一般的にいえば，電流がある領域を流れているとき，流れる方向に垂直な単位断面積を単位時間に通る電気量が j であれば，大きさが j で流れの方向を向くベクトル $\boldsymbol{j}$ を電流密度と呼ぶ．

電流は電荷の流れである．いま単位体積当たり ρ の電荷が速度 $\boldsymbol{v}$ で動くとき，$\boldsymbol{v}$ に垂直な単位面積を単位時間に通過する電荷は ρv であるから，電流密度は

$$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v} \tag{2.1}$$

で与えられる（図 2.1）．なお上の ρ は電流として動いている電荷の電荷密度であって，導体自体の電荷密度ではないことを注意しておく．電流が流れていても，一般に導体自体は帯電していない．

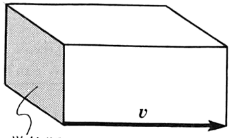


図 2.1　単位断面積を単位時間に電荷 ρv が通過する

オームの法則　　導体中の電流密度と電場の関係を議論する前に，粒子の運動と粒子に働く力の関係を思い出しておこう．真空中の質点の運動では，質点が等速運動をするのは質点に力が働かない場合である．ところが，空気中で速度に比例する摩擦力を受けながら落下する粒子の場合には，等速運動は摩擦力と重力がつり合った状態で起こる．それゆえ落下速度は重力に比例する．

これに相当する区別は電流の場合にもある．導線が超電導状態にある場合には，電荷は力を受けなくても導線中を（正確にいえば導線表面を）流れ続ける．超電導体を流れる電流を永久電流というが，永久電流が流れていても超電導体中には電場は存在しない．それに対しふつうの導体中の電流は摩擦を伴う運動に相当し，導体中に電場があるときにだけ電流が流れる．

導体中の電場と電流の関係についての経験法則が**オーム**（Ohm）**の法則**である．ここでは，オームの法則のマックスウェルによる表式から出発しよう．マックスウェルに従えば，導体中の電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ はその場所の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に比例する：

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{2.2}$$

比例定数 σ は物質定数で，これを**導電率**または**電気伝導度**（electric conductivity）という．σ の逆数 $1/\sigma$ を**抵抗率**または**比抵抗**という．

導線を電流が流れているときには導線中に電場があるので，電流に沿って電位差が存在する．導線上の二点 A，B 間の電位差

$$V=\varphi(\mathrm{A})-\varphi(\mathrm{B})=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}Edl$$

は，(2.2) により

$$V=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\frac{j}{\sigma}dl=\frac{l}{\sigma S}I$$

に等しい．ここで S は導線の断面積，l は AB 間の長さ，$I=jS$ は導線を流れる電流である．二点間の電気抵抗（単位：オーム(Ω)＝V/A）を

$$R=\frac{1}{\sigma}\frac{l}{S} \tag{2.3}$$

で定義すれば，上式は

$$V=RI \tag{2.4}$$

という，オームの法則の周知の形に帰着する．オームの法則の表式 (2.2) と (2.4) をくらべると，前者は導線の形によらない物質定数のみを含む点で，より基本的な式といえる．オームの法則は導体に対しては非常によく成り立つが，半導体などでは電場が強くなるとずれが現れる．

表 2.1 電気抵抗率（単位：オーム・m）

金属（20℃）	
Ag	1.62×10^{-8}
Cu	1.72×10^{-8}
Al	2.75×10^{-8}
W	5.5×10^{-8}
Fe	9.8×10^{-8}
Hg	95.8×10^{-8}
ニクロム（鉄を含まぬもの）	109×10^{-8}
絶縁体	
ガラス	$10^{11}\sim10^{13}$
磁器	$10^{10}\sim10^{12}$
ポリエチレン	$10^{13}\sim10^{14}$

表 2.1 にいくつかの物質の抵抗率を示す．導

体の抵抗率は一般に絶対温度にほぼ比例して増加する．

ジュール熱　導体中を電流が流れるときは，電荷が電場から力を受けながら動くので，電場は電荷に対して仕事をする．電流として流れる電荷の電荷密度を ρ，速度を $\boldsymbol{v}$ とすれば，単位体積中の電荷が電場 $\boldsymbol{E}$ から受ける力は $\rho\boldsymbol{E}$ であるから，電場が単位時間にする仕事，すなわち**仕事率**は，単位体積当たり

$$\rho\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} \tag{2.5}$$

である．定常電流では電流は時間的に一定であるから，電場から受ける仕事は熱や光などのエネルギーとして散逸する．このエネルギーを**ジュール熱**（Joule's heat）という．オームの法則を用いれば，単位時間に単位体積当たり発生するジュール熱は

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{j}^2 \tag{2.6}$$

と表せる（単位はワット/m³）．

〔**問**〕 電気抵抗 R の導線中で単位時間に発生するジュール熱は RI^2 であることを示せ．

電荷の保存則　§ 1.1 で述べたように，電荷が不生不滅であるという電荷の保存則は，最も基本的な自然法則の一つである．以下では電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ を用いて電荷の保存則を書き表し，それが電荷分布，電流分布にどのような制限を課すかを見る．はじめは，$\rho(\boldsymbol{r},t)$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ が時間変化する場合まで含めて考える．

空間中の任意の閉曲面を S，その内部の領域を V とする．S の上の微小面積 dS において，電流密度 $\boldsymbol{j}$ と dS の外向き法線 $\boldsymbol{n}$ の間の角を θ とすれば，単位時間に dS を通って S の外へ出る電荷は

$$jdS\cos\theta=j_n dS$$

である（図 2.2）．ここで $j_n=j\cos\theta$ は $\boldsymbol{j}$ の外向き方向成分を表す．したがって閉曲面 S から単位時間に外へ出る全電荷は，面積分 $\int_S j_n dS$ で与えられる．電荷の保存則により，S の内部の電荷 $\int_V \rho dV$ はこの分だけ

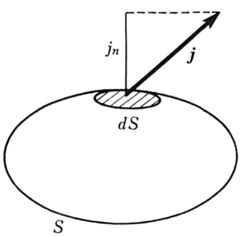


図 2.2　面 S から外へ出る電荷

単位時間に減少しなければならない．すなわち

$$\int_S j_n dS = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV$$

曲面 S は時間的に一定にとることにすれば，右辺の時間微分は積分の中に入れられるので，上式は

$$\int_S j_n dS = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{2.7}$$

と表される．これが電荷保存則を電荷密度と電流密度で表した式である．

上の表式を局所的な形に書き換えてみよう．閉曲面 S として微小体積 $\varDelta V$ の表面をとれば，§1.7 の（1.62）により，左辺は

$$\int_S j_n dS = \nabla\cdot\boldsymbol{j}\varDelta V$$

と変形できる．ここで $\nabla\cdot\boldsymbol{j}$ はベクトル場 $\boldsymbol{j}$ の発散である（(1.61) 参照)．一方（2.7）の右辺は $-\partial\rho/\partial t\cdot\varDelta V$ とおけるので，(2.7) は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.7'}$$

と表せる．これが局所的な電荷保存則である．

定常電流の電流密度　定常電流の場合にはすべての量が時間変化しないので，電荷保存則（2.7）の右辺はゼロとなり，任意の閉曲面 S に対し

$$\int_S j_n dS = 0 \tag{2.8}$$

が成り立つ．すなわち定常電流の電流密度 $\boldsymbol{j}$ はわき出しを持たない．いいかえれば，任意の閉曲面 S に流れこむ電流と S から流れ出す電流は常に等しい．定常電流が流れる導線では，一本の導線のどこの断面をとってもそこを通る電流は等しいが，これは電流密度にわき出しが無いことの結果である．

(2.8）にオームの法則（2.2）を代入すれば

$$0 = \int_S j_n dS = \int_S \sigma E_n dS$$

となるが，閉曲面 S を一様な導体の内部にとった場合には，電気伝導度 σ は一定であるからこれを積分の外へ出し，さらにガウスの法則を用いれば

$$0 = \int_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

を得る．任意の領域 V に対して上の結果が成り立つことから，定常電流が流れている導体の内部には，電荷は存在しないことがわかる．

しかし導体内部に静電場があるのだから，その源の電荷がどこかに分布しているはずである．それは電気伝導度 σ が一様でない所，すなわち導体の表面や，異なる種類の導体が接している境界面である．たとえば電池に導線を結べば，電池の両極と導線の接点に電荷が分布して静電場ができる．しかしこれだけでは導線に沿った電場ができるとは限らないが，もし電場が導線の方向と垂直な成分を持てば，導線内部で電荷が移動して表面に分布し，それがつくる電場が元の垂直成分を打ち消すため，結局導線内部では，導線の方向に沿う電場ができるのである．

一般に，導体に埋め込んだ二つの電極を通して，導体に定常電流 I を流す場合を考えてみよう．導体の電気伝導度を σ とする．電極自身の電気抵抗を無視すれば電流が流れていても電極中には電場はなく，電極自体は等電位になる．いま，陽極（I が流れこむ極）を囲む曲面 S を任意にとれば，S から外へ流れ出す電流 $\int_S j_n dS$ はもちろん I に等しい（図 2.3）．（S の法線は陽極から外へ向かう方向にとる．）ここでオームの法則とガウスの法則を用いれば，陽極表面に分布する全電荷を q とするとき，

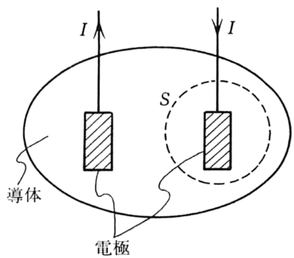


図 2.3 導体に電極を埋めこみ電流を流す

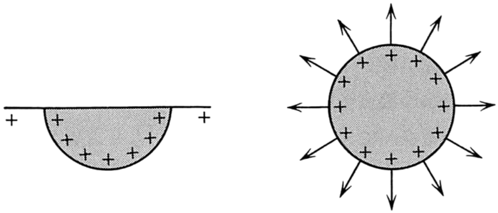
$$I=\int_S j_n dS=\sigma\int_S E_n dS=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}q \tag{2.9}$$

という関係が得られる．すなわち，陽極表面には電荷 $q=(\varepsilon_0/\sigma)I$ が分布する．同様の議論から，陰極表面には電荷 $-q$ が分布することがわかる．

【例 1】 半球状の電極　半径 a の半球状の電極を，図 2.4(a) に示すように大地に埋める．この電極を通して定常電流 I が大地に流れているときに，地中にできる電場を求めよう．もう一つの電極は十分遠方にあるとすれば，電流は無限遠に向かって流れると考えてよい．大地の電気伝導度を σ とし，電極の抵抗は無視する．

(2.9) により，電極表面には電荷 $q=\varepsilon_0 I/\sigma$ が分布する．このことと，大地の表面で電場が表面と平行になるという条件から，地中の電場は一意的に定まる．（一意性の証明は省略する．）この電場は，鏡像法を用いて求めることができる．

まず，地表から上の空間も大地で満たされている場合を考え（図 2.4(b)），球形の電極に電荷 $2q$ を帯電させる．このときは球対称性から，電荷は球の表面に一様に分布する．その結果，球外には，球の中心に点電荷 $2q$ がある場合と同様な，等方的な電場が



(a)　　(b)

図 2.4 (a) 大地に埋めた半球状の電極，(b) 電場を求めるために，(a) の鏡像の電極と大地をつけ加える

できる．

この電場の下半分の部分に注目すると，地表では電場は地表に平行で，また下半分の電極には電荷 q が帯電している．したがってこれが求める電場である．すなわち，電場は等方的で，球の中心から距離 r の点の電場の大きさは

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{r^2}=\frac{I}{2\pi\sigma}\frac{1}{r^2}$$

である．電極と無限遠との電位差は

$$V=\int_a^{\infty}E(r)dr=\frac{I}{2\pi\sigma a}\equiv RI$$

となる．$R=1/2\pi\sigma a$ は，この電極の**接地抵抗**と呼ばれる．

絶縁不良などの危険防止のための接地回路(アース)が有効に働くには接地抵抗の値が小さいことが重要で，それには大きな電極を用いる必要があることが上の結果から理解できる．ここで考えた電極は接地極のモデルで，実際には棒状の電極などが用いられる．

§ 2.2 起　電　力

導体中を電流が流れるとジュール熱が発生する．このジュール熱のエネルギー源について考察しよう．

コンデンサーに帯電した電荷を，両極板を導線で結んで放電させる場合には，コンデンサーの静電エネルギーがジュール熱に転化する．しかしこのような静電エネルギーは，時間的に不変な定常電流のエネルギー源となり得ないことは明らかである．

前節で学んだように，ジュール熱は直接には，導体中の静電場が電荷になす仕事が転化したものである．しかし回路全体としてみると，静電場は定常電流に対する仕事源にはなり得ない．定常電流の回路はもちろん閉じた回路であり，

電荷が回路を一周すれば電位は元の値に戻るので，静電場が電荷にする仕事の合計はゼロである．§1.4 で，静電場では任意の閉曲線 C について

$$\oint_C E_l dl=0$$

が成り立つことを学んだが，これは単位電荷が C を一周するとき，電場から受ける仕事の合計がゼロであることにほかならない．

回路の中で電位の高い所から低い所へ動くときは，電荷は電場から仕事を受ける．しかし電位の低い所から高い所へ動くときは，電荷は静電場からの力にさからって進まなくてはならない．それには別の仕事源の助けを必要とする．

したがって定常電流の回路は何等かの仕事源を含む．単位電荷が仕事源を通過するときに受ける仕事を，この仕事源の**起電力**（electromotive force）という．起電力の定義として，単位電荷が回路を一周するときに受ける仕事，といういい方もできる．単位電荷に対する仕事であるから，起電力の単位は電位差と同様にボルトである．

閉回路の電気抵抗が R であれば，電流 I が流れるときオームの法則により電位は RI だけ降下する．回路の仕事源は単位電荷にこれを回復する仕事を与えなければならないから，起電力を $\mathcal{E}$ とすれば

$$\mathcal{E}=RI \tag{2.10}$$

の関係が成り立つ．単位時間に仕事源を通過する電荷は I であるから，起電力の仕事率（単位時間に行う仕事）は

$$\mathcal{E}I=RI^2 \tag{2.11}$$

である．これは起電力がする仕事がジュール熱に転化することを示している．

起電力には多くの種類があるが，以下では代表的なものとして，電池の起電力と熱起電力についてごく簡単に説明する．個々の起電力の詳細な機構を調べることは，電磁気学の範囲の外に属する．

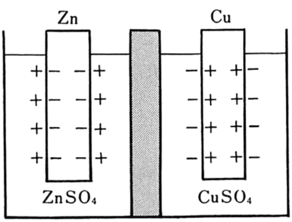


図 2.5　ダニエル電池

電　池　一般に金属を電解質溶液に入れると，金属はイオンとして溶液中に溶けだそうとする．このイオン化傾向は物質により異なる．電池はこれを利用するもので，ここでは例として，ダニエル電池と呼

ばれるものの原理を図式的に述べる（図 2.5 参照）.

容器を素焼の壁で二つに仕切り，一方に $ZnSO_4$ 水溶液と Zn 電極を入れ，他方に $CuSO_4$ 水溶液と Cu 電極を入れる．素焼の壁は $SO_4{}^{2-}$ イオンだけを通すことができる．ここで次の三つの過程が起こると仮定する．

（i） Zn 電極から Zn 原子一個が Zn^{2+} イオンとして溶液中に溶けだし，Zn 電極には電子二個が残る：

$$Zn \longrightarrow Zn^{2+}+2e^-$$

（ii） $CuSO_4$ の Cu^{2+} イオンが Cu 電極に析出する：

$$CuSO_4 \longrightarrow Cu^{2+}+SO_4{}^{2-}$$

（iii） 上の Zn^{2+} と $SO_4{}^{2-}$ が結合する：

$$Zn^{2+}+SO_4{}^{2-} \longrightarrow ZnSO_4$$

この三つの過程の結果は

$$Zn+CuSO_4 \longrightarrow Cu+ZnSO_4$$

という化学反応でまとめて表され，同時に Zn 電極から Cu 電極に電荷 $2q_e$ が移る．（電子の電荷を $-q_e$ と記した．）

上の化学反応で放出されるエネルギー（正確にいえばギブスの自由エネルギー）を ΔG とすれば，$\Delta G>0$ ならば実際に上の三つの過程が進行する．それと共に Cu 極は正に，Zn 極は負に帯電していくので，電極間の電位差が増大する．電位差が V のときに電荷 $2q_e$ を Zn 極から Cu 極へ運ぶには仕事 $2q_eV$ を要するので，電位差が

$$V=\frac{\Delta G}{2q_e}$$

に達すると平衡状態となり，過程の進行は止まる．

ここで二つの電極を導線で結ぶと，電子が導線を通って Zn 極から Cu 極へ移るため，再び上の過程が進行する．すなわち回路に電流が流れる．平衡状態を保ちながらこの過程が進むならば，電荷 $2q_e$ が回路を一周するときに受けとる仕事は ΔG である．したがって，この電池の起電力は

$$\mathcal{E}=\frac{\Delta G}{2q_e}$$

となる．これは両極間の電位差 V に等しい．（実際の電位差は約 1.1V である．）

電池は化学的エネルギーを電気エネルギーに変換する装置といえる．

熱起電力　1821年にゼーベック（Seebeck）は，二種類の金属の導線をつないで回路をつくり，二つの接点に温度差をつくると，回路に起電力が生じ電流が流れることを発見した(図 2.6)．実験によれば，発生する起電力は二つの金属の種類および二接点の温度 T_1, T_2 で定まる．この起電力を**熱起電力**と呼び，二種類の金属からつくった回路を**熱電対**という．熱起電力の大きさは，温度差が 100 度のとき mV の程度である．（温度 T_2 を固定するとき，熱起電力は T_1 の二次関数で近似的に表される．）

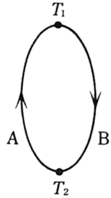


図 2.6　熱電対

現象論的には，熱起電力は次のように記述できる．これまで我々は，導体中に電場がなければ電流は流れないと考えてきたが，これは導体内部が一様な場合にのみ正しい．導線の両端に温度差があれば，導線中に温度勾配ができる．温度勾配があると導線内部は熱力学的な平衡状態にはないので，高温から低温に向かって熱が流れるが，それと共に電子自身も，拡散によって高温部分から低温部分へ流れる．その結果，導線中に電場がなくても電流が流れる．

いま導線に沿って位置座標 x をとり，位置 x における温度を $T(x)$ とすれば，一般に導線内部に電場 E と温度勾配 dT/dx の両方がある場合には，オームの法則は

$$j=\sigma\left(E-\alpha\frac{dT}{dx}\right)$$

の形をとるであろう．α は物質定数で，温度にも依存する．すなわち単位電荷は静電場からの力 E のほかに，温度勾配による力 $-\alpha(dT/dx)$ を受ける．この力が熱起電力の原因である．単位電荷が位置 x_2 から x_1 まで動くときこの力から受ける仕事は

$$-\int_{x_2}^{x_1}\alpha\frac{dT}{dx}dx=-\int_{T_2}^{T_1}\alpha(T)dT$$

である．したがって図 2.6 に示す向きに回路を一周するときに単位電荷が受ける仕事（すなわち熱起電力）は

$$\mathcal{E}=-\int_{T_2}^{T_1}\alpha_A(T)dT-\int_{T_1}^{T_2}\alpha_B(T)dT=-\int_{T_2}^{T_1}(\alpha_A-\alpha_B)dT$$

となり，確かに二つの導線の種類および両端の温度で定まる．

熱起電力では，熱エネルギーが電気的エネルギーに変換される．

誘導起電力 これは電磁誘導によって生じる起電力で，§ 4.1 でくわしく説明する．

問　　題

2.1 直径 1 mm，長さ 100 m の銅線およびニクロム線の電気抵抗はそれぞれどれだけか．（抵抗率は表 2.1 を参照せよ．）

2.2 100 V の電源から 20 m 離れた地点まで二本の電線を引く．使用電流が最大 20 A のとき，電圧降下を 1 ％以下におさえるためには，断面積何 mm^2 以上の電線を用いる必要があるか．

2.3 § 2.1 の図 2.4 の半球状の接地極で，半径を 0.5 m，大地の抵抗率を 100 オーム・m とする．

（イ） 接地抵抗はどれだけか．

（ロ） この電極を通して 1000 A の電流が地中に流れこむとき，電極の電位はどれだけに上がるか．

（ハ） このとき，電極の中心から 5 m 離れた地点の電場の強さはどれだけになるか．

2.4 直径 3 cm および 1 cm，高さ 6 cm の共軸の二つの円筒を電極とし，その間に抵抗率 10^{-2} オーム・m の電解質溶液を満たした電池の"内部抵抗"を求めよ．

2.5 電線に電流を流すとジュール熱のため電線の温度が上がるが，これが一定の値（例えば 60℃）以上にならないという要求から，電線に流せる許容電流が定まる．許容電流は電線の直径の 3/2 乗に比例することを示せ．

〔ヒント〕 電線表面の単位面積から単位時間に外部に逃げる熱は，電線と外部の温度差および電線の被覆の性質によって決まると考えてよい．

2.6 100 V，100 W のタングステン電球を考える．タングステンの抵抗率 ρ は，室温から融点（3655 K）の間で $\rho \propto T^{1.2}$ の関係を満たすことが実験から知られている．（T は絶対温度．室温での抵抗率は表 2.1 参照．）

（イ） タングステン線の温度を 2500 K に保つには，タングステン線の直径をどれだけにとればよいか．ただしタングステンの表面の単位面積から単位時間に放射される輻射のエネルギーは，シュテファン・ボルツマンの法則により σT^4（$\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot deg^{-4}}$）で与えられるものとする．

（ロ） タングステン線の長さはいくらにとるべきか．

2.7 前問の電球にかかる電圧が 1 ％変化すると，明るさは何％変わるか．

第3章　静　磁　場

§3.1　磁　　場

磁　　荷　　磁気の中で昔から知られていたものはもちろん磁石の作用である．磁石の働きは，その N 極と S 極にそれぞれ正と負の**磁荷** (magnetic charge) があって，正と正，負と負の磁荷の間には斥力が働き，正と負の磁荷の間には引力が働くと考えれば説明できる．この磁気力の定量的な研究は，静電気力の場合と同じくクーロンによって行われた．彼は，磁気量 q_{m1} および q_{m2} の二つの磁荷が距離 r はなれて静止しているとき，その間に働く磁気力の大きさ F が，静電気力の場合と同様に

$$F = k' \frac{q_{m1} q_{m2}}{r^2} \tag{3.1}$$

の形の法則に従うことを確かめた．k' は比例定数である．(3.1) も**クーロンの法則**と呼ばれる．

静電気力の場合にならって上の結果を，磁荷が周囲の空間に磁場をつくり，その磁場が第二の磁荷に力を及ぼす，という形に書き表してみよう．それには，原点 O にある磁荷 q_{m1} は任意の点 $\boldsymbol{r}$ に**磁場** (magnetic field, 磁界ともいう)

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = k' \frac{q_{m1}}{r^2} \hat{\boldsymbol{r}} \tag{3.2}$$

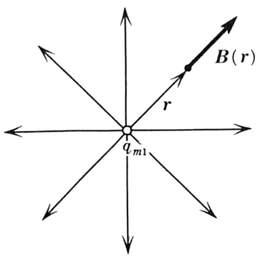


図 3.1　クーロン磁場

をつくり (図 3.1)，点 $\boldsymbol{r}$ に置かれた磁荷 q_m は磁場から力

$$\boldsymbol{F} = q_m \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{3.3}$$

を受ける，と考えればよい．(3.2) をクーロンの静磁場という．

ローレンツの力　　十九世紀になって，磁場は磁極に力を及ぼすだけではな

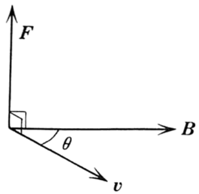


図 3.2　ローレンツ力

く，運動している電荷にも力を及ぼすことが発見された．磁場 $\boldsymbol{B}$ の中で動く電荷 q の速度を $\boldsymbol{v}$ とし，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角度を θ とする（図 3.2）．実験によると，電荷が受ける力 $\boldsymbol{F}$ の大きさは $qvB\sin\theta$ に比例する．$\boldsymbol{F}$ の方向は，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{B}$ に直交し，（$q>0$ のときは）$\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{B}$ へ廻す右ねじが進む向きを向く．これらの性質は，ベクトル積の記号を用いれば

$$\boldsymbol{F}=\alpha q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{3.4}$$

と表すことができる．α は比例定数である．

ここで $\boldsymbol{B}$ の単位を定める必要があるが，MKSA 単位系ではそのために (3.4) を用いる．まず (3.4) の比例定数 α を無次元の定数とみなせば $\boldsymbol{B}$ の次元が定まる．さらに $\alpha=1$ とおけば $\boldsymbol{B}$ の単位が定義される．こうして定めた $\boldsymbol{B}$ の単位を，テスラ（T）あるいは $\mathrm{Wb/m^2}$ と呼ぶ．（Wb はウェーバーで，後に定義する磁束の単位である．）また，$10^{-4}\,\mathrm{T}$ を1ガウスと呼び，これも $\boldsymbol{B}$ の手頃な単位としてよく用いられる．

上のように単位を定めれば，電荷が磁場から受ける力は

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{3.5}$$

と表される．一般に電場と磁場が両方ある場合には，電荷は力

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{3.6}$$

を受ける．(3.5) あるいは (3.6) を，**ローレンツ**（Lorentz）**の力**という．

これまでベクトル $\boldsymbol{B}$ を磁場と呼んできたが，$\boldsymbol{B}$ の正式の名前は**磁束密度**（magnetic flux density）あるいは磁気感応（magnetic induction）である．第5章で学ぶように，磁性体の内部では，磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ というベクトルが $\boldsymbol{B}$ とは別に定義される．しかし本章で扱う真空中の場の場合には，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の両方を用いる必要はないので，以下でも簡単のために，$\boldsymbol{B}$ のことを磁場と呼ぶことにする．

$\boldsymbol{B}$ の単位を定めたので，磁荷の単位は (3.3) から定まる．実際，(3.3) と (3.5) を比べれば，磁荷 q_m の単位が A·m であることがわかる．磁荷の単位が定まれば，クーロンの法則 (3.1) の比例定数 k' の値は，実験によって求まることになる．それについては次節でふれる．

周知のように，N 極または S 極を単独に磁石から取り出すことはできない．

磁石を二つに切断すると，切口に新たな磁極ができて，磁石はN 極と S 極を常に対で持つからである．このことは，磁石を構成する基本的な要素が N, S の磁荷ではなく，微視的な磁気双極子であることを示唆している．磁荷 q_m と $-q_m$ が微小間隔で並んだものが**磁気双極子**（magnetic dipole）で，$-q_m$ から q_m へのベクトルを $\boldsymbol{d}$ とするとき（図 3.3），積 $\boldsymbol{m}=q_m\boldsymbol{d}$ を**磁気モーメント**（magnetic moment）と呼ぶ．磁気双極子がつくる磁場は，§ 1.4 の電気双極子の電場と同様に求めることができる．

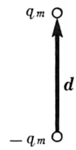


図 3.3
磁気双極子

〔**注意**〕 磁気量の定義には二つの流儀があり，本によっては，本書の q_m と $\tilde{q}_m=\mu_0 q_m$ の関係にある $\tilde{q}_m$ を磁気量と定義することもある．この定義を EH 対応と呼び，それに対して本書の定義を EB 対応と呼ぶ．磁気量として $\tilde{q}_m$ をとれば，その単位は Wb である．

§ 3.2　ビオ・サバールの法則

1820 年にエルステッド（Oersted）は，電流がその周りに渦状の磁場をつくることを発見した（図 3.4）．それを知ったアンペール（Ampère）は自らも実験を重ね，電流間の相互作用に関する理論を短期間でつくりあげた．

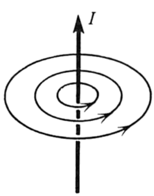


図 3.4　電流がつくる磁力線

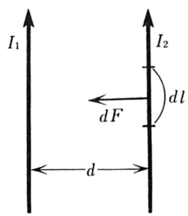


図 3.5　平行電流の間に働く力

平行電流の間の力　第 1 章の静電場の理論は，二つの電荷の間の力に関する実験結果（クーロンの法則）から出発した．これに対し静磁場の理論は，二本の平行電流の間の力をもとにして展開される．磁場に関する実験の中で，これが最も単純なものだからである．

二本の平行な直線電流を考える（図 3.5）．実験によれば，両方の電流の向きが同じならば電流の間に引力が働き，反対向きならば斥力が働く．平行電流

が十分に長い場合には，長さ dl の導線部分が受ける力 dF は，電流の強さ I_1, I_2 および長さ dl に比例し，平行電流の間隔 d に反比例する．すなわち

$$dF = k_m \frac{2I_1I_2}{d} dl \tag{3.7}$$

である．ここで比例定数を $2k_m$ と置いたのは，後の便宜のためである．

単 位 系　平行電流の間の力 (3.7) と電荷の間のクーロン力

$$F = k\frac{q_1q_2}{r^2}$$

を並べてみると，比例定数 k, k_m の中のどちらか一つの値を任意に決めれば，それで電荷・電流の単位が定まり，もう一つの比例定数の値は実験から決まることがわかる．別のいい方をすれば，比 k/k_m は (速度)^2 の次元を持つので，この比の値は，電荷・電流の単位の選び方にはよらないはずである．

十九世紀の中頃に，実験から k/k_m の値が c^2 にほぼ一致することがわかった (c は真空中の光速度)．この事実には，後にマックスウェルの光の電磁波理論によって，理論的根拠が与えられた．したがって

$$\frac{k}{k_m} = c^2 \tag{3.8}$$

は厳密に成り立つ関係である．四元単位系では $k = 1/4\pi\varepsilon_0$，$k_m = \mu_0/4\pi$ という記号を用いるので，上の関係は

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = c^2 \tag{3.9}$$

と表される．μ_0 は**真空の透磁率**と呼ばれる．

電荷間の力と電流間の力を比べると，後者の方が測定が容易であるから，MKSA 単位系では平行電流の間の力の測定を基礎にとり，k_m の値を

$$k_m \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \tag{3.10}$$

と決めて，(3.7) によって電流の単位アンペアを定義する．(3.10) と実験事実 (3.8) から，クーロンの法則の比例定数 k は

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}c^2 \tag{3.11}$$

となる．第1章ではこのことを先き取りして，比例定数 k の値を (3.11) のように定めて電荷の単位クーロンを定義する，といういい方をしたのである．

磁場が電流に及ぼす力　平行電流の間の力 (3.7) を，一方の電流がその

周りに磁場をつくり，その磁場がもう一方の電流に力を及ぼす，という形に分解して表そう．そのためまず，磁場が電流に及ぼす力の表式を求めよう．基礎となる実験事実は，速度 $\boldsymbol{v}$ で動く電荷 q が磁場 $\boldsymbol{B}$ から受けるローレンツ力 (3.5) である．

§ 2.1 で学んだように，導線中を電荷密度 ρ の電荷が速度 $\boldsymbol{v}$ で動くとき，それによって生ずる電流の電流密度は $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$ である．したがって単位体積中の電荷が磁場 $\boldsymbol{B}$ から受ける力は

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} \tag{3.12}$$

と表される．導線の断面積を S とすれば，長さ dl の導線部分が受ける力は（図 3.6）

$$d\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}Sdl=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}Sdl$$

となる．ところで，ベクトル $S\boldsymbol{j}$ の大きさは導線を流れる電流 I に等しく，方向は電流の方向にほかならない．そこで電流をその方向まで含めてベクトル $\boldsymbol{I}=S\boldsymbol{j}$ で表すことにすれば，上式は

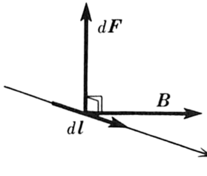


図 3.6　磁場が電流要素に及ぼす力

$$d\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}dl \tag{3.13}$$

と書ける．あるいは，いま考えている導線部分の長さと方向を，まとめてベクトル $d\boldsymbol{l}$ で表せば，$\boldsymbol{j}$ と $d\boldsymbol{l}$ の方向は一致するので

$$d\boldsymbol{F}=Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{3.14}$$

と書くこともできる．(3.13) または (3.14) が，磁場が電流に及ぼす力の表式である．

直線電流がつくる磁場　　ここで平行電流の問題に戻る．図 3.7 の直線電流 I_1 がつくる磁場が (3.14) に従って電流部分 $I_2d\boldsymbol{l}$ に力を及ぼすとして，そ

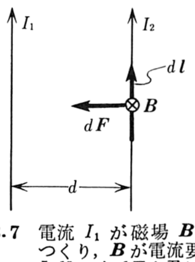


図 3.7　電流 I_1 が磁場 $\boldsymbol{B}$ をつくり，$\boldsymbol{B}$ が電流要素 $I_2d\boldsymbol{l}$ に力 $d\boldsymbol{F}$ を及ぼす

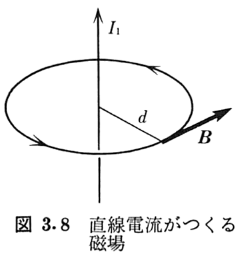


図 3.8　直線電流がつくる磁場

の結果が (3.7) になるためには，直線電流 I_1 がその周りに渦状の右ねじ向きの磁場をつくり，その大きさが

$$B = k_m \frac{2I_1}{d} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1}{d} \tag{3.15}$$

であればよい (図 3.8).

【例 1】 1A の直線電流から 1cm 離れた所にできる磁場．(3.15) に $I_1 = 1\,\mathrm{A}$, $d = 10^{-2}\,\mathrm{m}$, $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ を代入すれば $B = 2\times10^{-5}\,\mathrm{T} = 0.2$ ガウスとなる．

ビオ・サバールの法則　上の結果を，任意の形の電流回路がつくる磁場の表式に一般化したい．もし電流の微小部分がつくる磁場がわかれば，重ね合わせの原理によりそれを回路全体について加え合わせれば，目的は達せられる．ところが電流の微小部分がつくる磁場は，直接実験から求めるわけにはいかない．そこでまず法則の形を推定し，それに基づいていろいろな形の電流回路に対して磁場を計算し，それを実験と比較して元の法則の正しさを確かめる必要がある．

ここでは，磁荷と電流回路が及ぼし合う力をもとにして，電流要素（電流の微小部分）がつくる磁場の形を推定することにしよう．原点 O にある磁荷 q_m が，任意の電流回路 C に及ぼす力を考える (図 3.9)．原点 O から回路 C の微小部分 $d\boldsymbol{l}$ へ引いたベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすれば，q_m は $d\boldsymbol{l}$ の所にクーロン磁場

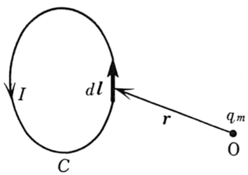


図 3.9　磁荷と電流回路

$$\boldsymbol{B}' = k'\frac{q_m}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

をつくる ($\hat{\boldsymbol{r}}$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトル)．回路 C を流れる電流を I とすれば，電流要素 $Id\boldsymbol{l}$ が $\boldsymbol{B}'$ から受ける力は，(3.14) により

$$d\boldsymbol{F}' = Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}'$$

であるから，回路 C 全体は磁荷 q_m から力

$$\boldsymbol{F}' = \oint_C Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}' = k'Iq_m\oint_C \frac{d\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

を受ける．

一方，電流回路 C が原点 O につくる磁場を $\boldsymbol{B}$ とすれば，回路 C は磁荷 q_m に力

$$\boldsymbol{F} = q_m\boldsymbol{B}$$

を及ぼす．上の二つの力 $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{F}'$ の間に作用反作用の法則が成り立つとすれば，$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}'$ でなければならないから，回路 C が点 O につくる磁場は

$$\boldsymbol{B}=-k'I\oint_C\frac{d\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

となる．

この結果をいいかえれば，回路 C を流れる電流 I は，任意の点 P に磁場

$$\boldsymbol{B}(\mathrm{P})=k'I\oint_C\frac{d\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2} \tag{3.16}$$

をつくる．ここで $\boldsymbol{R}$ は回路の微小部分 $d\boldsymbol{l}$ から P へのベクトル，$\hat{\boldsymbol{R}}$ は $\boldsymbol{R}$ 方向の単位ベクトルである．この結果から，電流要素 $Id\boldsymbol{l}$ が点 P につくる磁場が

$$d\boldsymbol{B}=k'\frac{Id\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2} \tag{3.17}$$

であると解釈できる．

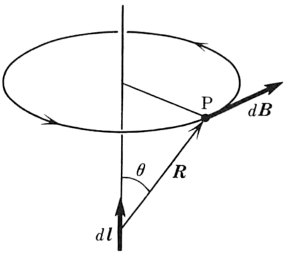


図 3.10　電流要素がつくる磁場

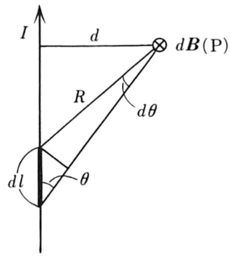


図 3.11　直線電流がつくる磁場

(3.17) はベクトル積を含むので，静電場やクーロンの静磁場にくらべると一見複雑で，わかりにくいかもしれない．(3.17) の内容をていねいにいえば，$d\boldsymbol{B}$ の大きさは，$d\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{R}$ のなす角を θ とすれば（図 3.10）

$$dB=k'\frac{Idl\sin\theta}{R^2} \tag{3.18}$$

であり，また $d\boldsymbol{B}$ の方向は $d\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{R}$ に垂直である．$d\boldsymbol{B}$ の磁力線は，$d\boldsymbol{l}$ を通る直線に関し軸対称な，右ねじ向きの渦状の閉曲線である．

ここで (3.17) から，直線電流の磁場の式 (3.15) を再現してみよう．直線電流 I から距離 d の点 P における磁場を計算する．直線電流の微小部分 $d\boldsymbol{l}$ が (3.17) に従い P につくる磁場 $d\boldsymbol{B}$ は，図 3.11 でいえば紙面の表から裏

へ向く．したがって $\boldsymbol{B}(\mathrm{P})$ の大きさを求めるには，単に (3.18) の dB をすべての dl について加え合わせればよい．図からわかるように

$$\frac{dl\sin\theta}{R^2}=\frac{d\theta}{R}=\frac{\sin\theta d\theta}{d}$$

であるから，点 P の磁場は

$$B(\mathrm{P})=k'\int\frac{Idl\sin\theta}{R^2}=\frac{k'I}{d}\int_0^\pi\sin\theta d\theta=k'\frac{2I}{d}$$

と求まる．こうして B が距離 d に反比例するという実験結果が再現された．

上の結果が (3.15) と一致するためには，定数 k' の値は

$$k'=k_m\equiv\frac{\mu_0}{4\pi}$$

でなければならない．前節で述べたように，クーロンの法則 (3.1) の比例定数 k' は直接実験から定められるべき性格のものである．しかし磁荷と電流回路が及ぼし合う力に作用反作用の法則を仮定すると，電流間の力の表式 (3.7) の比例定数 k_m と関係がつくのである．

k' の値が定まったので，(3.16) は

$$\boldsymbol{B}(\mathrm{P})=\frac{\mu_0}{4\pi}I\oint_C\frac{d\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}\tag{3.19}$$

と書ける．これを**ビオ・サバール** (Biot, Savart) **の法則**と呼ぶ．定常電流による磁場を与えるビオ・サバールの法則は，静電場のクーロンの法則に対応する基礎法則である．

定常電流は時間的に一定の電流であるから，それが流れる導線は閉じた回路でなければならない．前に考えた“無限に長い”直線電流も，物理的には，非常に大きな回路の一部分を近似的に表したものである．

ここで (3.19) を，電流が空間に連続的に分布している場合にも適用できる形に，書き直しておこう．導線の断面積を S，電流密度を $\boldsymbol{j}$ とすれば，前に述べたように $Id\boldsymbol{l}=\boldsymbol{j}Sdl=\boldsymbol{j}dV$ の関係がある．ここで dV は導線の体積要素である．したがって (3.19) は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}dV'\tag{3.20}$$

と表すことができる．ここで $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ であり，積分は $\boldsymbol{r}'$ についての体積積分である．

【例 2】 円電流が中心軸上につくる磁場　ビオ・サバールの法則の応用例として，半径 a の円形回路に電流 I が流れる場合を考えよう．まず，円の中心における磁場を求める．円周上の長さ dl の部分が中心につくる磁場は，大きさは

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{dl}{a^2}$$

で，方向は中心軸の方向を向く（向きは円電流に関し右ねじが進む向き）．dl についての和は円周の長さ $2\pi a$ を与えるので，中心の磁場は

$$B=\frac{\mu_0 I}{2a} \tag{3.21}$$

となる．

次に中心軸上の任意の点 P の磁場を考える．図 3.12 に示すように，P から円周までの距離を R とすれば，円周上の微小部分 dl がこの点につくる磁場 $d\boldsymbol{B}$ の軸方向の成分 $dB_{//}$ は，図に示す角度 θ を用いて

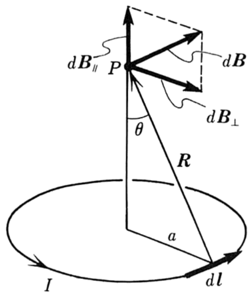


図 3.12　円電流が中心軸上につくる磁場

$$dB_{//}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{dl}{R^2}\sin\theta=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{dl}{a^2}\sin^3\theta$$

と表される．（上式の θ を，(3.18) の中の角 θ と混同しないでほしい．今の場合 $d\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{R}$ は常に直交しているので，(3.18) の θ は $\theta=\pi/2$ である．）dl について積分すると，軸と垂直な方向の成分 $d\boldsymbol{B}_\perp$ は対称性から相殺されるので，磁場は再び中心軸方向を向き，その大きさは

$$B=\frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\theta \tag{3.22}$$

となる．円の中心では $\theta=\pi/2$ であるから，(3.22) は (3.21) に戻る．

§ 3.3 磁　　位

磁荷がつくるクーロン磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が，静電場と同様に，あるスカラー関数 $\phi_m(\boldsymbol{r})$ の勾配として

$$\boldsymbol{B}=-\mu_0\nabla\varphi_m \tag{3.23}$$

の形に表せることは当然であるが（上の定義に定数 μ_0 を入れるのは単なる習慣である），本節では，定常電流がつくる磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ もやはり (3.23) の形に表せることを示そう．この関数 $\varphi_m(\boldsymbol{r})$ を磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の**磁位** (magnetic potential) と呼ぶ．

磁位は多価関数　最初に，定常電流の場合には，$\varphi_m(\boldsymbol{r})$ は位置 $\boldsymbol{r}$ の一価

関数ではあり得ないことを説明する．任意の二点 P_1 と P_2 の間の道 C に沿う (3.23) の線積分

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = -\mu_0\int_C \nabla\varphi_m\cdot d\boldsymbol{l} \tag{3.24}$$

を考える（図 3.13）．点 $\boldsymbol{r}$ と点 $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{l}$ における関数 $\varphi_m(\boldsymbol{r})$ の差は，$d\boldsymbol{l}=(dx, dy, dz)$ について一次までとれば

$$\varphi_m(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{l})-\varphi_m(\boldsymbol{r})=\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi_m}{\partial z}dz=\nabla\varphi_m\cdot d\boldsymbol{l} \tag{3.25}$$

であるから，(3.24) の右辺は

$$-\mu_0\int_C \nabla\varphi_m\cdot d\boldsymbol{l} = -\mu_0[\varphi_m(P_2)-\varphi_m(P_1)] \tag{3.26}$$

となる．（これは微分の逆演算が積分であるという微積分学の基本定理にほかならない．）

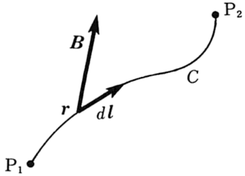


図 3.13 磁場の線積分

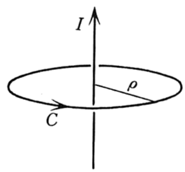


図 3.14 直線電流を一周する積分路

ここで道 C として，P_1 から出て P_1 へ戻る閉曲線をとると，もし $\varphi_m(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{r}$ の一価関数ならば (3.26) は消える．ところが (3.24) の左辺は，一般にはゼロにならないのである．

例として直線電流 I がつくる磁場をとり，その一つの磁力線に沿って上の線積分を行ってみる（図 3.14）．この場合の磁力線は円周であり，その半径を ρ とすれば磁場の大きさは円周上で

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

であるから，線積分は

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_C B dl=\mu_0 I$$

となる．したがって (3.24) と (3.26) から磁位 $\varphi_m(\boldsymbol{r})$ は，磁力線に沿って

電流を一周して元の点に戻るとき，値が

$$\Delta\varphi_m = -I \qquad (3.27)$$

だけ変化する多価関数であることがわかる．(後で説明するように，上の結果はもっと一般の場合にも成り立つ．電流の回路は任意の形でよく，電流を一周する道も任意の閉曲線でよい.)

ここでパラドックスめいた問題を一つ提出しておこう．磁荷 q_m は磁場から力 $q_m\boldsymbol{B}$ を受けるので，上の磁場の中で q_m を閉曲線 C に沿って一周させると，q_m は磁場から仕事

$$q_m\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 q_m I$$

を受ける．定常電流による磁場は時間変化しないので，この結果はエネルギー保存則に反するように見える (第一種永久機関)．実際には，どこかに仕事源がかくされているのだろうか．

この問題の解決は次の章まで待つことにするが，いずれにせよ，定常電流の磁場の磁位 $\varphi_m(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ の多価関数であるから，電位の場合のように，磁位に対して“単位試験磁荷の位置エネルギー”という物理的意味づけは与えられないことを強調しておく．

磁位の表式　ここで，磁位 $\varphi_m(\boldsymbol{r})$ の具体的な形について説明する．環状電流が任意の点 $\boldsymbol{r}$ に対して張る立体角を $\Omega(\boldsymbol{r})$ とすると (図 3.15)，この環状電流がつくる磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の磁位は

$$\varphi_m(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{4\pi}\Omega(\boldsymbol{r}) \qquad (3.28)$$

で与えられる．これは驚くべき結果といえよう．

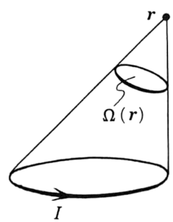


図 3.15　環状電流が点 $\boldsymbol{r}$ に対して張る立体角

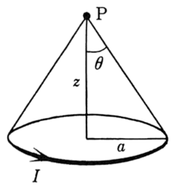


図 3.16　円電流の中心軸上の点

【例 1】 円電流が軸上につくる磁場　(3.28) の一般的証明を述べる前に，前節の例 2 で調べた円電流の磁場を，(3.28) が正しく再現することを確かめておく．中心軸上の任意の点 P が円形回路を見る立体角 Ω(P) は，P を頂点とする円錐の半頂角を θ とすれば (図 3.16)，

$$\Omega(\theta) = 2\pi(1-\cos\theta) \qquad (3.29)$$

である (問題 1.9 参照)．中心軸を z 軸とすれば，中心軸に沿う Ω の微分は，$z = a\cot\theta$ より (a は円電流の半径)

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{d\Omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dz} = \frac{d\Omega}{d\theta}\Big/\frac{dz}{d\theta} = -\frac{2\pi}{a}\sin^3\theta$$

となるので

$$B_z = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3\theta$$

を得る．これは（3.22）と一致する．

ここで立体角の表式（3.29）をよく見ると，点 P が回路の上側（回路の向きが反時計まわりに見える側）にあるときは $\Omega < 2\pi$ で，Ω は P を頂点とする円錐の立体角を表すが，P が回路の下側（回路の向きが時計まわりに見える側）にあるときは $\Omega > 2\pi$ で，Ω は円錐の外側の立体角を表している．点 P が回路の張る面を通り抜けるとき，立体角は図 3.17 の（a）から（b）へ連続的に移るが，（3.29）の立体角はこれに対応しているわけである．点 P が $z=-\infty$ から $z=+\infty$ へ動く間に，（3.29）は -4π 変化する．

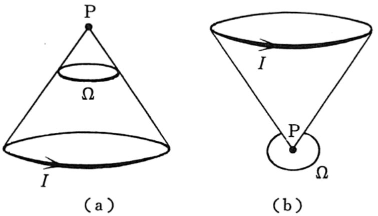


図 3.17　点 P が環状電流を見る立体角．P が電流回路を通り抜けると，立体角 Ω は（a）から（b）へ連続的に移る

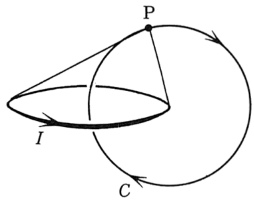


図 3.18　電流回路と絡む閉曲線 C

一般に環状電流と（たがいに右ねじの向きに）絡む任意の道 C に対しても，同じことが成り立つ．すなわち容易にわかるように，図 3.18 で点 P が C を一周するとき，P が環状電流を見る立体角は -4π 変化する．したがって（3.28）で与えられる磁位 φ_m は，回路と一回絡む道に沿って一周すると，値が $-I$ 変化する多価関数である．これは前に直線電流の磁場について注意したことの一般化である．

（3.28）の証明　磁位（3.28）から（3.23）によって導いた磁場が，環状電流がつくるビオ・サバールの磁場

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{\boldsymbol{R}}}{R^2} \tag{3.30}$$

に一致することを示そう．それには，任意の点 $\boldsymbol{r}$ から回路を見る立体角を $\Omega(\boldsymbol{r})$ とするとき，勾配 $\nabla\Omega$ の計算が必要になる．

そこでまず，点 $\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}$ へ移るときの立体角の変化 $\delta\Omega$ を求めよう．$\delta\Omega$ は，

点 $\boldsymbol{r}$ は固定して，回路の方を $-\delta\boldsymbol{r}$ だけ平行移動したときの，立体角 Ω の変化とみることもできる．これは，平行移動 $-\delta\boldsymbol{r}$ に際し，回路が通過する部分の面積が，点 $\boldsymbol{r}$ に対し張る立体角に等しい．回路の微小部分 $d\boldsymbol{l}$ が通過する面積は $(-\delta\boldsymbol{r})\times d\boldsymbol{l}$ で，それが $\boldsymbol{r}$ に対し張る立体角は，$d\boldsymbol{l}$ から $\boldsymbol{r}$ へのベクトルを $\boldsymbol{R}$ とするとき

$$\frac{(-\delta\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{l})\cdot\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}=-\frac{(d\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}})\cdot\delta\boldsymbol{r}}{R^2}$$

である．（ベクトル積の公式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$ を用いた.）したがって回路全体では

$$\delta\Omega=-\delta\boldsymbol{r}\cdot\oint\frac{d\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}$$

となる．

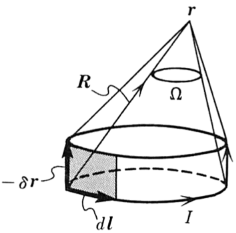


図 3.19　回路が $-\delta\boldsymbol{r}$ 平行移動するときの立体角 Ω の変化は，点 $\boldsymbol{r}$ が帯状部分を見る立体角に等しい

ここで（(3.25) と同様に）$\delta\Omega$ が

$$\delta\Omega=\Omega(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})-\Omega(\boldsymbol{r})=\nabla\Omega\cdot\delta\boldsymbol{r}$$

と表せることに注意すれば，$\Omega(\boldsymbol{r})$ の勾配の表式

$$\nabla\Omega=-\oint\frac{d\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}$$

が得られる．この結果を (3.23)，(3.28) に代入すれば，ビオ・サバールの磁場 (3.30) が再現される．

環状電流と等価な板磁石　　磁位の表式 (3.28) には，極めて直観的な解釈を与えることができる．そのためにまず，薄い板の両面に N 極と S 極が一様な密度で分布している板磁石（磁殻または磁気二重層ともいう）の磁場について考える．（板は平面状である必要はない.）両面に分布する磁荷の面密度を $\pm\sigma$ とし板の厚さを d とする．これは，単位面積当たりの磁気モーメントが

$$\lambda=\sigma d$$

の磁気双極子が，板に沿って一様に分布しているとみることもできる．したがって板磁石による磁場の磁位は，磁気双極子による磁位を加え合わせて求められる．

電荷がつくる電場と磁荷がつくる磁場はどちらも同じ形のクーロンの法則で与えられるので，磁気双極子による磁位は，§ 1.3 の電気双極子による電位をそのまま翻訳すれば得られる．すなわち，磁気モーメントを $\boldsymbol{m}$ とすれば

$$\varphi_m(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\tag{3.31}$$

である．ここで $\boldsymbol{r}$ は，双極子から磁場を求める点へ引いたベクトルである．

板磁石の各点における法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ で表せば，その点における単位面積当たりの磁気モーメントはベクトル $\lambda\boldsymbol{n}$ であるから，板磁石が点 P につくる磁位は，板磁石の面 S の上の面積分

$$\varphi_m(\mathrm{P})=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\lambda\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}dS=\frac{\lambda}{4\pi}\int_S\frac{\cos\theta}{R^2}dS$$

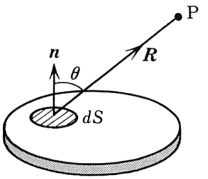


図 3.20　板 磁 石

で表される．ここで $\boldsymbol{R}$ は，面積要素 dS から点 P までのベクトルで，θ は $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{R}$ のなす角である（図 3.20）．一方，面 S が点 P に対して張る立体角 $\Omega(\mathrm{P})$ は

$$\Omega(\mathrm{P})=\int_S\frac{\cos\theta}{R^2}dS$$

であるから，上の磁位の式は

$$\varphi_m(\mathrm{P})=\frac{\lambda}{4\pi}\Omega(\mathrm{P}) \tag{3.32}$$

と書くことができる．すなわち，板磁石による磁位も，立体角によって表されるのである．

この結果を（3.28）と比較すると，閉回路を流れる電流 I がつくる磁場が，回路を縁とし，単位面積当たり I の磁気モーメントを持つ板磁石による磁場と同等なことがわかる．（板磁石の面の形は任意である．）ビオ・サバールの法則はクーロンの法則にくらべ複雑であるから，環状電流をそれと等価な板磁石で置きかえてみることは，磁場を求める際にしばしば役に立つ．

特に微小な環状電流 I は，それが囲む面の面積を S，その面の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすれば，磁気モーメントが

$$\boldsymbol{m}=IS\boldsymbol{n} \tag{3.33}$$

の磁気双極子と同じ磁場をつくる(図3.21)．そのため（3.33）で定義された $\boldsymbol{m}$ を**環状電流の磁気モーメント**と呼ぶ．

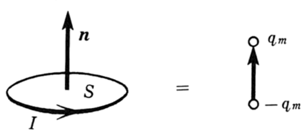
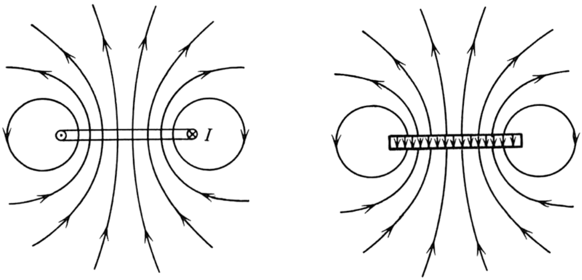


図 3.21　微小環状電流と等価な磁気双極子

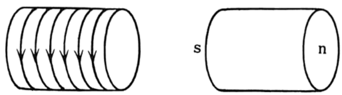
〔注意〕 環状電流による磁場と板磁石による磁場が同等なのは，板磁石の外部の磁場に限る．板磁石の両面の磁荷分布が磁石の内部につくる磁場は，環状電流による磁場とは全く異なる（図 3.22）．したがって，電流による磁場を等価な板磁石を用いて求める場合には，磁場を考える点が板磁石の外部にあるように，板磁石をとる必要がある．



（a）　（b）

図 3.22 （a）環状電流による磁場 （b）それと等価な板磁石による磁場

【例 2】 ソレノイドがつくる磁場 円筒に導線を密に巻いたコイルをソレノイドと呼ぶ．これに電流 I を流したときにできる磁場を考える．ソレノイドの中心軸の向きを，電流の向きから右ねじの規則によって定める．軸方向の単位長さ当たりの導線の巻数を n とする．この単位長さの部分に着目すると，これは環状電流 nI であるから，単位面積当たりの磁気モーメントが $\lambda=nI$ の板磁石と等価である．いいかえれば，両面に面密度 $\pm nI$ で磁荷が一様に分布した，厚さが単位長さの板磁石と等価である．ソレノイドの全体は，この板磁石をつみ重ねたものとみなせる．中間の磁荷は隣どうしの板磁石で相殺されるので，結局ソレノイドは，両端の面に面密度 $\pm nI$ の磁荷が分布した棒磁石と等価になる（図 3.23）．ソレノイドの外部の磁場の様子は，これから容易に知ることができる．特に，ソレノイドの長さが十分に長くなると，ソレノイド外部の磁場は（ソレノイドの両端付近を除けば）ソレノイドの長さの二乗に反比例して小さくなることがわかる．



（a）　（b）

図 3.23 ソレノイド（a）と棒磁石（b）は同じ磁場を外部につくる

ソレノイドの内部の磁場を求めるには少し注意がいる．前に述べたように，環状電流による磁場と同等なのは，板磁石の外部の磁場だけである．そこで，磁場を求める点 P の前後のごく薄い間隔の巻線を取り除いてしまう．取り除く範囲が十分に少なければ，それによって点 P の磁場に影響を与えることはない．こうしてから再び環状電流を板磁石でおきかえれば，今度はソレノイドが，図 3.24 に示す二つの等価な棒磁石と等価になる．点 P は磁石の外にあるので，その磁場が等価な磁石の磁場から求まるのである．すなわち点 P の磁場は，図 3.24 の四枚の面に面密度 $\pm nI$ で分布した磁荷がつくる磁場に等しい．このうち点 P をはさむ二枚の面の磁荷の寄与は，§ 1.5 で考えた平行板コ

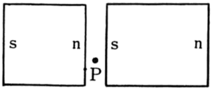


図 3.24 ソレノイドの内部の点Pの磁場は，Pをはさむ二つの棒磁石による磁場に等しい

ンデンサーの中の電場を翻訳して得られる．二枚の面の間隔が十分に小さいので，できる磁場 $\boldsymbol{B}_0$ は軸方向を向き，その大きさはいたる所で一様で

$$B_0=\mu_0 nI \tag{3.34}$$

である．これにソレノイドの両端の面上の磁荷の寄与を加えれば，点 P の磁場が得られる（問題 3.7 参照）．ソレノイドが十分に長い場合には，後者の寄与は（長さ)^2 に反比例して小さくなるので，両端付近以外では，ソレノイド内部の磁場は上記の一様な磁場 $\boldsymbol{B}_0$ で近似できる．

図 3.25 に，磁力線の定性的な様子を示す．

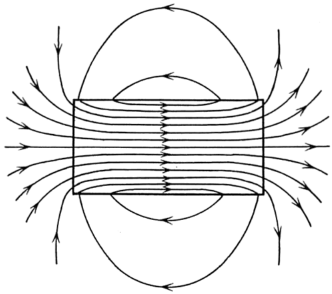


図 3.25 ソレノイドによる磁場

§ 3.4 アンペールの法則

静電場のクーロンの法則に対応する法則は，定常電流がつくる磁場の場合にはビオ・サバールの法則である．静電場では，クーロンの法則からガウスの法則が導かれた．それに対応してビオ・サバールの法則から，本節のアンペールの法則が導かれる．

ガウスの法則では任意の閉曲面から出る電束を問題にしたが，アンペールの法則では，任意の閉曲線 C に沿う磁場 $\boldsymbol{B}$ の循環

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_C B_l dl$$

を問題にする．B_l は曲線 C の接線方向への $\boldsymbol{B}$ の成分である．この循環は，

閉曲線 C に沿って単位磁気量の磁荷が一周するとき，磁場が磁荷にする仕事を表す.

まず，$\boldsymbol{B}$ の源が一つの環状電流である場合を考える．回路 C_1 を流れる電流 I_1 による磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は，磁位 $\varphi_m(\boldsymbol{r})$ により

$$\boldsymbol{B}=-\mu_0\nabla\varphi_m=-\frac{\mu_0}{4\pi}I_1\nabla\Omega$$

と表せる．$\Omega(\boldsymbol{r})$ は点 $\boldsymbol{r}$ が電流回路 C_1 を見る立体角である．したがって任意の閉曲線 C に沿う循環は

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{\mu_0}{4\pi}I_1\oint_C \nabla\Omega\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{\mu_0}{4\pi}I_1\varDelta\Omega$$

となる．ここで $\varDelta\Omega$ は，点 $\boldsymbol{r}$ が閉曲線 C を一周するときの立体角の変化であり，閉曲線 C が回路 C_1 と正の向き（右ねじ向き）に絡むときは，$\varDelta\Omega=-4\pi$，負の向きに絡むときは $\varDelta\Omega=4\pi$，絡まないときは $\varDelta\Omega=0$ である．それゆえ循環は，上の三つの場合に対応して

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 I_1,\ -\mu_0 I_1,\ 0 \tag{3.35}$$

の値をとる.

次に回路 $C_1, C_2, \cdots$ に電流 $I_1, I_2, \cdots$ が流れる場合を考える．重ね合わせの原理により，磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は各電流がつくる磁場の和であるから，$\boldsymbol{B}$ の循環も，各 I_i の寄与の和として表される（図 3.26).

(3.35) によれば，電流 I_i のうち C と正の向きに絡むものは循環に正の寄与を与え，C と負の向きに絡むものは負の寄与を与え，C と絡まないものは寄与を与えない.

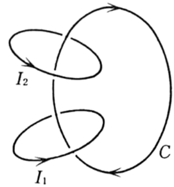


図 3.26　閉曲線 C と絡む電流回路

ここで改めて，C と正の向きに絡む電流には $I_i>0$，C と負の向きに絡む電流には $I_i<0$ と符号をつけ，C と絡む全電流 I を

$$I=\text{閉曲線}\ C\ \text{と絡む電流の代数和}$$

と定義すれば，C に沿う循環は

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 I \tag{3.36}$$

で与えられる．これを**アンペールの法則**または回路定理という.

〔注意〕 C と二重に絡む電流 I_ι は，図 3.27 に示すように，二つの一重に絡む回路に分けることができる．(図で新たにつけ加えた電流は往復で打ち消して，余分な磁場はつくらない．) 一般に C と n_ι 回絡む回路を流れる電流 I_ι は，(3.36) の I に $n_\iota I_\iota$ の寄与を与える．



図 3.27 閉曲線 C と二回絡む回路 (a) は C と一回ずつ絡む二つの回路 (b) と等価である

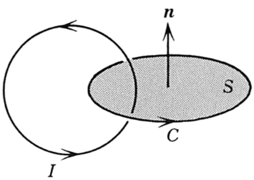


図 3.28 閉曲線 C の向きと C が張る面 S の法線の向き

閉曲線 C が張る任意の面 S について，C につけた向きから S の表裏を右ねじの規則により定める．(すなわち S 上の各点の法線 $\boldsymbol{n}$ を，C の向きからみて右ねじが進む方向につけ，そちらを表とする．) C と正の向きに絡む電流 I_ι は，S を裏から表へ通る (図 3.28)．したがって (3.36) の I を

I＝閉曲線 C が張る面 S を
裏から表へ通る電流の代数和

といい表すこともできる．C と絡まない電流が面 S を通る場合には，裏→表，表→裏と二回 (一般には偶数回) S を通るので，I には寄与を与えない．

電流が電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ で連続的に分布している場合にも，定常電流ならば流線は必ず閉じる．それゆえこのような電流分布も環状電流の集まりとみなすことができ，アンペールの法則はそのまま成り立つ．§2.1 で学んだように，面 S を通る電流 I は

$$I=\int_S j_n dS$$

で与えられるので，アンペールの法則 (3.36) は，電流が連続的に分布する場合は

$$\oint_C B_l dl=\mu_0\int_S j_n dS \tag{3.37}$$

と表される．

磁場が適当な対称性を持つ場合には，アンペールの法則から磁場を容易に求めることができる．

【例 1】 無限に長いソレノイドの内部の磁場　軸方向の単位長さ当たりの導線巻数を n とし，導線に流れる電流を I とする．対称性から，内部の $\boldsymbol{B}$ は軸と平行で，その大きさは中心軸からの距離のみによると考えてよい．外部の磁場は $\boldsymbol{B}=0$ と仮定する．図 3.29 に示すような，軸と平行な単位長さの辺を持つ長方形 ABCD に，アンペールの法則を適用する．(3.36) の左辺の線積分に寄与するのは辺 AB だけで，循環の値は AB 上の磁場 B に等しい．長方形を貫く電流は nI であるから，(3.36) より

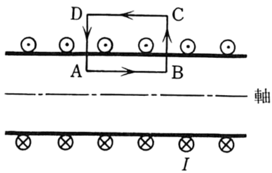


図 3.29　アンペールの法則の積分路

$$B=\mu_0 nI$$

を得る．これは (3.34) と一致する．上の結果は，磁場が中心軸からの距離にも依存しないことを示している．

〖注意〗　外部の磁場についての仮定 $\boldsymbol{B}=0$ は，アンペールの法則自身からは導くことができない．後でも述べるように，アンペールの法則だけからは磁場は一意的には定まらない．磁場を一意的に求めるには，ビオ・サバールの法則か，前節の等価磁殻の方法を用いる必要がある．

【例 2】 平面電流がつくる磁場　無限に広い平面上に一様に分布して流れる電流を考える．平面を yz 平面とし，電流は z 方向を向くとする．y 方向の単位長さを通る電流を J で表す．この電流分布を直線電流の集まりとみれば，電流分布がつくる磁場が $x>0$ では y 方向を向き，$x<0$ では $-y$ 方向を向くことは明らかであろう．磁場の大きさは yz 平面からの距離 $|x|$ にのみ依存する．

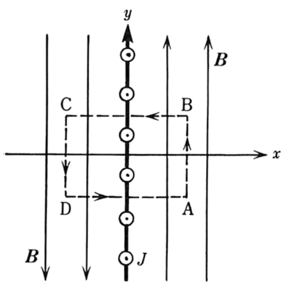


図 3.30　平面電流がつくる磁場

図 3.30 に示すように，xy 平面と平行な長方形 ABCD を，辺 AB, CD が yz 平面と等距離 x にあるようにとる．辺 AB, CD は単位長さとする．アンペールの法則 (3.36) の左辺に寄与するのは辺 AB, CD で，$B_y(-x)=-B_y(x)$ であるから，循環の値は $2B_y(x)$ となる．長方形を貫く電流は J であるから，(3.36) より磁場は

$$B_y=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\mu_0 J & x>0 \\ -\dfrac{1}{2}\mu_0 J & x<0 \end{cases}$$

と求まる．結局，磁場の大きさは x にも依存しないことがわかった．

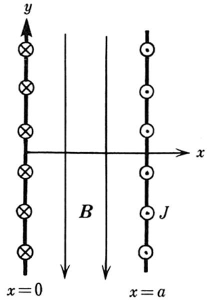


図 3.31 二枚の平行な平面電流による磁場

【例 3】 平行な二平面上の電流分布がつくる磁場

間隔 a の二枚の平行な平面上に，反対向きに電流が一様に分布して流れている．平面 $x=a$ の上では電流は z 方向を向き，平面 $x=0$ の上では $-z$ 方向を向くとする．電流の密度は，どちらも y 方向の単位長さ当たり J とする．

磁場は，例 2 の結果の重ね合わせによって，次のように求まる：

$$B_y=\begin{cases} -\mu_0 J & 0<x<a \\ 0 & x>a,\ x<0 \end{cases}$$

これは一種のソレノイドの磁場と見ることができる．

静磁場の基礎法則　ここで，§1.4 で電場について考えた問題を，磁場についても考えよう．定常電流を源とする磁場の基礎法則はビオ・サバールの法則で，アンペールの法則はこれから導かれた．では，アンペールの法則はビオ・サバールの法則と等価であろうか．いいかえれば，環状電流が与えられたとき，任意の閉曲線 C に対しアンペールの法則 (3.37) を満たす $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は一意的に定まるであろうか．もしそうならば，ビオ・サバールの法則から求められる磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ はアンペールの法則を満たすので，これが (3.37) の唯一の解ということになり，アンペールの法則とビオ・サバールの法則が等価になる．

しかし実際には，アンペールの法則だけからは，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は一意的には定まらない．このことは，§1.4 の場合と同様な議論から容易にわかる．すなわち $\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$ を，任意の閉曲線 C に対し

$$\oint_C \widetilde{B}_l dl=0 \tag{3.38}$$

を満たすベクトル場とする．具体的には，たとえば磁荷がつくるクーロン磁場を考えればよい．電場と磁場のクーロンの法則は全く同じ形を持つので，静電場と同様に，クーロン磁場に対しても (3.38) が成り立つことは明らかである．いま，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ がアンペールの法則 (3.37) を満たすベクトル場であれば，

$$\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})+\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}) \tag{3.39}$$

で定義されるベクトル場 $\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r})$ も，明らかに (3.37) を満たす．したがって (3.37) の解は一意的ではない．一意的な解を得るには，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ のわき出しについての制限をつけ加える必要がある．

任意の面 S の上で磁場 $\boldsymbol{B}$ の法線方向成分 B_n を積分した

$$\Phi=\int_S B_n dS \tag{3.40}$$

を，面 S を通る**磁束** (magnetic flux) という．磁束の単位は $\mathrm{T\cdot m^2}$ であるが，これをウエーバー (Wb) と呼ぶ．流体の流れとの類推でいえば，Φ は S を通る流量に当たる．特に S が閉曲面で，S 上の各点の法線 $\boldsymbol{n}$ を外向きにとった場合には，Φ は閉曲面 S から外へ出る流量，すなわち S の内部のわき出しに対応する．

ビオ・サバールの法則に従う磁場の場合には，任意の閉曲面 S に対し

$$\int_S B_n dS=0 \tag{3.41}$$

が成り立つ．すなわちビオ・サバールの磁場はどこにもわき出しを持たない．このことを示すには，電流要素 $Id\boldsymbol{l}$ がつくる磁場に対して (3.41) が成り立つことを示せば十分である．

§ 3.2 で学んだように，電流要素 $Id\boldsymbol{l}$ による磁場の磁力線は，$d\boldsymbol{l}$ を通る直線を軸にする円である．したがって磁力管は，この直線について軸対称なトーラス (ドーナツ) になる．磁場の軸対称性により，磁力管をどのように切っても，切り口を通る磁束は一定である．任意の閉曲面 S と磁力管は二個所 (一般には偶数個所) で交わるので，S に入る磁束と S から出る磁束は等しく，(3.41) の積分で両者は相殺する．すべての磁力管について同じことがいえるので，$Id\boldsymbol{l}$ による磁場は (3.41) を満たす．

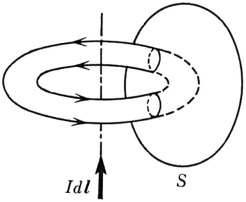


図 3.32　電流要素による磁力管と閉曲面の交わり

ビオ・サバールの磁場は電流要素 $Id\boldsymbol{l}$ がつくる磁場の重ね合わせであるから，一般のビオ・サバールの磁場に対しても (3.41) が成り立つことがわかる．

そこで定常電流がつくる磁場に対する基礎法則として，アンペールの法則 (3.37) のほかに，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ がわき出しを持たないという要求 (3.41) をつけ加えることにしよう．さらに §1.4 の場合と同様に，遠方で $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は r^{-2} の程度で小さくなるという境界条件を課すことにする．

この三つの要求を置けば，今度は $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は一意的に定まる．なぜならば，この三つの要求を満足するベクトル場が二つあるとすれば，その差 $\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$ は (3.38) のほかに，任意の閉曲面 S に対し

$$\int_S \widetilde{B}_n dS=0$$

を満たさねばならないが，§ 1.4 で述べたように，このように循環もわき出しも持たないベクトル場 $\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$ は，上記の境界条件の範囲内では存在しないからである．ビオ・サバールの磁場は上の三つの要求を満たすので，これが唯一の解ということになる．すなわち (3.37)，(3.41) および上記の境界条件の三つで，ビオ・サバールの法則と等価になる．したがって，アンペールの法則 (3.37) とわき出しに関する条件 (3.41) を，定常電流による磁場の基礎法則にとることができる．

磁場の源として，定常電流のほかに磁荷も存在している場合には，磁荷がつくるクーロン磁場は静電場同様にわき出しを持つので，(3.41) を静電場のガウスの法則に対応する式

$$\int_S B_n dS=\mu_0\int_V \rho_m dV \tag{3.42}$$

で置きかえねばならない．ここで V は閉曲面 S の内部の領域，ρ_m は磁荷密度である．磁場の基礎法則として (3.37) と (3.42) を要求すると，それを満たす磁場は，ビオ・サバールの磁場とクーロン磁場の和として一意的に定まる．(その証明は上と同様にできるのでここではくり返さない．)

このように，最も一般的な形では，静磁場の基礎法則はアンペールの法則 (3.37) とガウスの法則 (3.42) である．しかし現実には，磁荷は単独では発見されていない．磁石の N 極と S 極を磁荷と解釈できるだけである．そこでアンペールは次のような仮説をたてた．磁石が磁極を持つことは，磁石を微視的な磁気双極子の集まりとみれば説明できる．ところが § 3.3 で学んだように，正負の磁荷からできた磁気双極子は微小な環状電流と同じ形の磁場をつくる．そこで，磁石の構成要素である磁気双極子は，実は分子・原子の内部を流れる微小な環状電流（分子電流）であると仮定することができる．このアンペールの仮説に従えば，すべての磁場の源は電流であり，微視的に見ても磁荷は存在しないことになる．

現代の物理学から見ると，物質の磁性の理解には量子力学が不可欠であり，アンペールの仮説はそのままでは単純すぎる．磁性の主要な原因は電子のスピンに伴う磁気モーメントである．スピンは一種の自転であり，直観的には，電子は帯電した剛体球で，その自転により電子の内部に環状電流ができて，それが磁気モーメントを生むと考えることができる．しかしいずれにせよ，電子がつくる微視的な磁場がわき出しを持たないという点では，アンペールの予想は当たっている．

もっとも上で述べたことは，磁荷の存在の可能性を理論的に否定したわけではない．単に，我々が日常経験する物質の磁性は磁荷とは無関係だというだけである．電磁気学の体系自身は電気と磁気について対称にできているので，たとえ磁荷が存在しても何等

困難はないのである.

§ 3.5　磁場が電流に及ぼす力

運動する電荷は磁場からローレンツの力を受ける．その結果，電流は磁場から力を受ける．電流 I が流れる回路の一部分 $d\boldsymbol{l}$ に働く力が

$$d\boldsymbol{F}=Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{3.43}$$

と表せることは，すでに § 3.2 で学んだ．本節ではこの力の具体的な例について説明する．

一様な磁場の中の環状電流　磁場 $\boldsymbol{B}$ が一様な場合には，(3.43) を回路全体について加えるとその合力は消える．すなわち，

$$\boldsymbol{F}=\oint Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}=I\left(\oint d\boldsymbol{l}\right)\times\boldsymbol{B}=0$$

しかし，回路を回転させようとするトルク（力のモーメント）は，一般にはゼロでない．これを簡単な場合について調べてみる．

長方形のコイルの各辺を，図 3.33 のように 1, 2, 1′, 2′ と呼ぶことにし，辺 1, 1′ の長さを a，辺 2, 2′ の長さを b とする．一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ の中に，辺 1, 1′ が $\boldsymbol{B}$ と直交するようにコイルを置く．コイルの張る面の法線 $\boldsymbol{n}$ の向きは，電流の向きから右ねじの規則により定め，$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角を θ とする．$\boldsymbol{B}$ が辺 1, 1′，および辺 2, 2′ に及ぼす力の大きさは，(3.43) によりそれぞれ $F_1=BIa$，$F_2=BIb\cos\theta$ であり，力の向きは図 3.33 に示す通りである．コイルに働く合力は明らかにゼロであるが，辺 1, 1′ に働く力は，大きさが

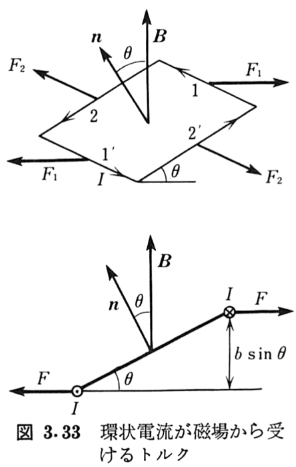


図 3.33　環状電流が磁場から受けるトルク

$$N=F_1b\sin\theta=BIab\sin\theta$$

のトルクをコイルに及ぼす．回転軸は $\boldsymbol{n}$ および $\boldsymbol{B}$ と直交するので，このトルクはベクトル積により

$$\boldsymbol{N}=Iab\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}$$

と表される．(3.33) で定義したコイルの磁気モーメント $\boldsymbol{m}=Iab\boldsymbol{n}$ を用いれば，上の結果は

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B} \tag{3.44}$$

と表せる．

上では非常に簡単な場合についてトルクの表式 (3.44) を導いたが，どんな環状電流も上で考えた形の小さなコイルの集まりとみなせるので，(3.44) は一般に成り立つ表式である．

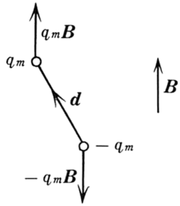


図 3.34　磁気双極子に磁場が及ぼすトルク

つぎに，図 3.34 に示す磁気モーメント $\boldsymbol{m}=q_m\boldsymbol{d}$ の磁気双極子が一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ の中にある場合を考える．$\boldsymbol{B}$ が磁荷に及ぼす力の合力は再びゼロであるが，トルクは

$$\boldsymbol{N}=q_m\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$$

となる．すなわち，磁気モーメントが等しい環状電流と磁気双極子をくらべると，両者は磁場から同じトルクを受ける．(もちろんこれは偶然ではない．両者は同じ磁場をつくるので，磁場からも同じ反作用を受けるのである．)

環状電流がトルク (3.44) を受けることが，電流計や電動機の原理である．

磁気モーメントのポテンシャルエネルギー　トルク (3.44) は，磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ (すなわちコイルの法線 $\boldsymbol{n}$) を $\boldsymbol{B}$ の方向に向けようとする．したがって $\boldsymbol{m}$ が $\boldsymbol{B}$ と平行に向く場合が，コイルの安定な平衡の位置である．(このことは図 3.34 の磁気双極子で考えれば自明である．) 一般にトルク (3.44) に逆らって $\boldsymbol{m}$ をある方向に向けておくには，外から (3.44) を打ち消すトルク

$$\boldsymbol{N}_{\mathrm{ext}}=-\boldsymbol{N}=-\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$$

を加える必要がある．こうして平衡を保ちながら $\boldsymbol{m}$ を ($\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$ を軸として) $\delta\theta$ だけ回転させると，その間に $\boldsymbol{N}_{\mathrm{ext}}$ は仕事

$$N_{\mathrm{ext}}\delta\theta=mB\sin\theta\delta\theta=-mB\delta(\cos\theta) \tag{3.45}$$

を行う．この仕事はコイルのポテンシャルエネルギーの増加となる．したがって $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角が θ のとき，コイルはポテンシャルエネルギー

$$U=-mB\cos\theta=-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B} \tag{3.46}$$

を持つ．

〔注意〕 磁気モーメントが磁場中で持つエネルギー (3.46) は，環状電流の力学的なポテンシャルエネルギーであるが，これを，電流が外部磁場 $\boldsymbol{B}$ の中で持つエネルギーということはできない．上では回路が回転するとき電流は一定に保たれると仮定しているが，磁場中で回路が回転すると次章で学ぶ誘導起電力が誘起されるので，電流を一定に保つには，誘導起電力を打ち消す電源を回路に入れる必要がある．実は，回路を回転させるとき外力がする仕事 (3.45) は，そのままこの電源に移り，電流自身が持つエネルギーは変化しない．いいかえれば，(3.46) はこの電源まで含めた系のエネルギーである．

ソレノイドの巻線が受ける圧力　§ 3.3，§ 3.4 で学んだように，無限に長い円筒に単位長さ当り n 巻きの割合で導線を密に巻いたソレノイドに電流 I を流すと，円筒内部には軸方向を向く一様な磁場 $B=\mu_0 nI$ ができる．(3.43) から容易にわかるように，導線を流れる電流は，磁場から円筒側壁に直交する外向きの力を受ける．

以下で，側壁の単位面積中を流れる電流が受ける力，すなわちソレノイドの巻線が受ける圧力を求めよう．その際注意しなければならないのは，電流に働く力の表式 (3.43) を適用するとき，磁場の大きさとしてソレノイド内部の B を用いてはいけないということである．磁場はソレノイド内部では B，外部ではゼロで，側壁はその境界にある．実際には導線は有限の太さを持っているのだから，磁場が導線内部で B からゼロへ連続的に変化することを考慮に入れなければならない．

導線の太さを考慮に入れるため，中心軸からの距離 r が $a<r<a+d$ の領域に，一様な電流密度で電流が流れると考えよう．ここで a は円筒の半径で，$d\ll a$ とする．この領域中の磁場 $B(r)$ は，$B(a)=B$ から $B(a+d)=0$ まで r と共に直線的に変化する（問題 3.6 参照）．ある点を流れる電流はその点の磁場から力を受けるので，平均すれば，この領域の電流が磁場 $B/2$ から力を受けることになる．単位面積中の電流要素は nI であるから，これが

$$p=nI\frac{B}{2}=\frac{1}{2\mu_0}B^2 \tag{3.47}$$

の力を受ける．これがソレノイドの巻線が受ける圧力である．

ファラデイとマックスウェルの近接作用の考えによれば，隣どうしの磁力管は側壁を通して圧力 $p=B^2/2\mu_0$ を及ぼし合う．電流が受ける圧力は，この磁力管の圧力の現れといえる．

巻線に大電流を流して強い磁場をつくる際は，この圧力に耐えるように巻線

を外側からおさえておく必要がある.

【例 1】 $B=1\mathrm{T}$ の場合の圧力 (3.47) に $\mu_0/4\pi=10^{-7}$, $B=1\mathrm{T}$ を代入すれば

$$p=\frac{4\pi}{\mu_0}\frac{B^2}{8\pi}=\frac{10^7}{8\pi}=3.98\times10^5\,\mathrm{N/m^2}$$

となる. 1kg 重=9.8N であるから, これは $p=4.06\,\mathrm{kg}$ 重/cm^2 に当たる.

§ 3.6 静磁場の基礎法則の微分形

定常電流はビオ・サバールの法則に従う静磁場をつくる. § 3.4 で学んだように, ビオ・サバールの法則は二つの法則

$$\int_S B_n dS=0 \tag{3.48}$$

$$\oint_C B_l dl=\mu_0\int_S j_n dS \tag{3.49}$$

と等価である. この二つの法則を, 積分を含まない局所的な形に書き換えよう.

ガウスの法則 まず磁場に対するガウスの法則 (3.48) から始める. § 1.7 の静電場の場合の議論にならって, 閉曲面 S として体積 ΔV の微小直方体の表面をとる. そのとき (3.48) の左辺は, (1.61) で定義したベクトル場の発散を用いて $\nabla\cdot\boldsymbol{B}\Delta V$ と表されるので, (3.48) は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}\equiv\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \tag{3.50}$$

に帰着する. これが磁場に対するガウスの法則の微分形である. この式は, 電流がつくる磁場がどこにもわき出しを持たないことを表す.

アンペールの法則 (3.49) は任意の閉曲線 C とそれが張る面 S に対して成り立つ式である. そこで C として微小な閉曲線をとり, C が張る面 S の法線を $\boldsymbol{n}$ とする. (1.60) から (1.67) を導いた議論をくりかえせば, (1.65) で定義したベクトル場のカールを用いて, (3.49) の左辺は $(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{n}\Delta S$ と表される. ΔS は面 S の面積である. (3.49) の右辺は $\mu_0\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\Delta S$ とおけるので, (3.49) は

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{n}=\mu_0\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}$$

となる. この式は任意の $\boldsymbol{n}$ について成り立たねばならないので, これからベクトルの等式

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{3.51}$$

が得られる．これがアンペールの法則の微分形である．この式を成分で書けば

$$\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\mu_0 j_x \quad , \quad \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}=\mu_0 j_y \quad , \quad \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}=\mu_0 j_z$$

となる．(3.51) の直観的な意味は，電流の流れに沿って磁場 $\boldsymbol{B}$ は渦糸を持つということである．

ベクトルポテンシャル　§ 3.3 で学んだ磁位は，電流がつくる磁場を求める際に有用で，特に環状電流と磁殻の等価性への橋わたしをしてくれる．ところが磁位は，環状電流を一周すると価が $-I$ 変化する多価関数であり，これが応用上の欠点である．特に電流が連続的に分布している領域では，ある点からどんな道を一周して元の点に戻っても磁位は変化し，しかもその値が道ごとに変わるという複雑なことになる．このような場合には，磁位を用いて磁場を計算するのは大変面倒である．

幸なことに，磁位に代わる別の方法として，マックスウェルにより考案されたベクトルポテンシャルの方法が存在する．

いま天降り的に，磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が別のベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ のカールにより

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.52}$$

の形に表せたと仮定する．この磁場の発散を計算する：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

ベクトル積の公式 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ により，右辺は $(\nabla\times\nabla)\cdot\boldsymbol{A}$ に等しい．これを成分で表すと

$$(\nabla\times\nabla)\cdot\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}\right)$$

となるが，A_x, A_y, A_z が位置の一価関数であれば上式の各項は消えるので，

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

という恒等式が成り立つ．それゆえ (3.52) の形に表わされたベクトル場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は，いたる所で

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

を満たす．これはまさに電流による磁場に対する基礎法則の一つである．こうして (3.52) の形で与えられた $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は磁場に対するガウスの法則を自動的に満たすので，もう一つの基礎法則であるアンペールの法則を $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が満たすように，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ をえらべばよいことになる．ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を**ベクトルポテンシャル**と呼ぶ．

磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の関係 (3.52) は一見とりつきにくいが，次のように見れば直観的に理解できる．まず (3.52) だけでは，与えられた磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ に対し $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は一意的には定まらないことに注意する．実際，渦無しの条件

$$\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}=0$$

を満たすベクトル場 $\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})$ を用いて新しいベクトル場

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})+\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})$$

を定義すると，もし $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が (3.52) を満たせば，$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r})$ もまた (3.52) を満たすので，(3.52) だけでは $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は一意的に決まらないのである．

そこで $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の発散に対する条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{3.53}$$

をつけ加える．これをクーロンゲージの条件と呼ぶ．ベクトルポテンシャルを定める式 (3.52)，(3.53) を，電流分布から磁場を定める式 (3.51)，(3.50) と比較すると，後者で形式的なおきかえ

$$\mu_0\boldsymbol{j}\longrightarrow\boldsymbol{B}\quad,\quad\boldsymbol{B}\longrightarrow\boldsymbol{A} \tag{3.54}$$

をすれば前者が得られることがわかる．

ところで (3.51)，(3.50) の解はビオ・サバールの磁場である．したがって (3.52)，(3.53) を満たす $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は，ビオ・サバールの磁場から (3.54) のおきかえをすれば得られる．要するに，与えられた磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を形式的に電流密度とみなして，それがつくるビオ・サバールの磁場を求めればそれが $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ なのである．

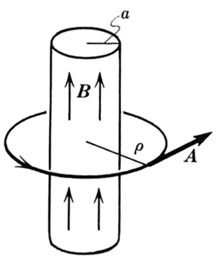


図 3.35 ソレノイドの磁場とベクトルポテンシャル

【例 1】 無限に長いソレノイドの磁場を表すベクトルポテンシャル ソレノイドの中心軸を z 軸とし，半径を a とする．ソレノイドの内部には z 方向を向く一様な磁場ができるので，その大きさを B とする (図 3.35)．

上で説明した方針に従い，まず半径 a の導線に一様な電流密度 j で電流が流れるとき，導線内外にできる磁場を考える．軸対称性から，磁力線は中心軸のまわりの円で，磁場の大きさは中心軸からの距離 ρ のみに依存する．磁力線に沿ってアンペールの法則を適用すれば，磁場の大きさは

$$B(\rho)=\begin{cases}\mu_0 j\rho/2 & \rho<a\\ \mu_0 ja^2/(2\rho) & \rho>a\end{cases}$$

と求まる.

ここで元の問題に戻ると，ソレノイドの磁場 B に対応するベクトルポテンシャルは，上の結果から (3.54) のおきかえをすれば得られる．すなわち $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は z 軸に関し軸対称な図 3.35 の形を持ち，その大きさは

$$A(\rho)=\begin{cases} B\rho/2 & \rho<a \\ Ba^2/(2\rho) & \rho>a \end{cases}$$

である.

上では，与えられた磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ に対応するベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の形を考えたが，実際には，与えられた電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ からまず $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を求め，つぎに (3.52) により $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を求めるという手順が用いられる．そのためには，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ の関係を与える式が必要である.

アンペールの法則 (3.51) に (3.52) を代入した式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mu_0\boldsymbol{j}$$

の左辺は，ベクトル積の公式

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

を用いれば

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

と変形できる．∇^2 は (1.69) で定義したラプラシアンである．クーロンゲージの条件 (3.53) を課せば右辺の第一項は落ちるので，アンペールの法則は

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j} \tag{3.55}$$

と表される．これが $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{j}$ の関係を与える式である.

この式の x, y, z 成分は，静電場の電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ に対するポアッソンの方程式

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

と全く同じ形を持つ．一方，静電場の電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ は，電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ から

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}dV' \qquad (R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$$

の形に定まる．方程式が同じ形を持てば，それを満たす場も同じ形を持つはずであるから，(3.55) を満たすベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は，電流分布から

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}dV' \tag{3.56}$$

によって与えられる．環状電流 I の場合には，上式は

$$A(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}I\oint\frac{dl}{R} \tag{3.57}$$

と表すこともできる．ここで R は，回路の微小部分 $\boldsymbol{dl}$ から場を求める点 $\boldsymbol{r}$ までの距離である．(3.56) あるいは (3.57) が，電流分布からベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を求めるための公式である．

問　題

3・1　間隔 1m で張られた二本の平行な電線に 100 A の電流が反対向きに流れている．電線間に働く力は電線 1m 当たり何グラム重か．

3・2　直径 10cm の円形の枠に電線を 10 回巻いたコイルがある．電線に 1A の電流を流すとき，コイルの中心における磁場は何ガウスか．円の中心軸上でコイルの中心から 5cm 離れた点の磁場は何ガウスか．

3・3　半径 a の無限に長い導体円柱を，電流 I が一様な電流密度で軸方向に流れている．円柱の内外にどのような磁場ができるか．

3・4　前問で導体円柱が超電導状態にある場合には，電流は導体表面を流れる．このとき円柱内外の磁場はどうなるか．

3・5　半径 a および $b(a<b)$ の同軸の二つの無限に長い導体円筒がある．この同軸円筒を電流 I の往復の線路に用いるとき，どのような磁場ができるか．

3・6　内径 a，肉厚 d の無限に長い導体円筒を，円筒を一周する向きに一様な電流密度 j で環状電流が流れている（図 3.36）．このときできる磁場を，中心軸からの距離 ρ の関数として求めよ．

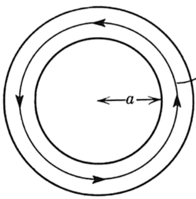


図 3・36

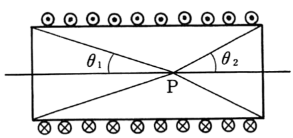


図 3・37

3・7　単位長さ当たり n 回の割合で電線を巻いたソレノイドに電流 I を流す．中心軸上の点 P における磁場は，図 3.37 に示す角 θ_1, θ_2 を用いれば

$$B(\mathrm{P})=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$

で表される．これを（イ）ビオ・サバールの法則，（ロ）等価磁殻の二つの方法で導け．

3・8　十分に長いソレノイドの内部の一様な磁場を B_0 とするとき，中心軸上のソレノ

イドの端の点の磁場は $B_0/2$ であることを示せ.

3.9 (イ) 原点にある磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ の磁気双極子が任意の点 $\boldsymbol{r}$ につくる磁場を求めよ.

(ロ) 円電流が中心軸上につくる磁場の表式 (§ 3.2 の (3.22)) が, 遠方で磁気双極子の磁場に近づくことを確かめよ.

3.10 一辺 $2a$ の正方形の回路が, 原点 O を中心として xy 平面上にある.

(イ) 回路に電流 I が流れるとき, z 軸上の任意の点 P にできる磁場を求めよ.

(ロ) 点 P が十分遠方にあれば, 上の磁場は磁気双極子の磁場に近づくことを確かめよ.

3.11 半径 a の二つの円形コイルを, 中心軸を共通にして間隔 a で平行に並べたものをヘルムホルツ・コイルという. 二つのコイルに同じ向きに電流 I を流すとき, 中心軸上の磁場は, 二つのコイルの中点 O の付近ではほぼ一定の値をもつことを示せ.

[ヒント] 中心軸上の点の位置を, O を原点とする座標 x で表すとき, x による磁場の変化は x^4 から始まることを確かめよ.

3.12 一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ の中に, 半径 a の円形のコイルが, コイルの面が $\boldsymbol{B}$ と平行になるように置いてある. このコイルに電流 I を流すときにコイルが受けるトルクを, 磁場が電流に及ぼす力から直接求めよ.

3.13 500 ガウスの磁場の中で面積 $10\,\mathrm{cm}^2$, 巻数 100 のコイルに 1 A の電流を流すとき, コイルが受けるトルクをグラム重・cm 単位で計算せよ. 磁場はコイルの面と平行とする.

3.14 水平方向の磁場 $\boldsymbol{B}$ の中に, 巻線数 N, 面積 S のコイルを針金でつるす (図3.38). 針金を軸とする回転に対するコイルの慣性モーメントを M, 針金が角 θ ねじれたときに生じる復元力のトルクを $k\theta$ (k は比例定数) とする. いま微小時間の間だけコイルに電流が流れると, コイルは磁場から撃力を受け回転を始める. コイルに流れる全電気量 Q とコイルの最大回転角 $\theta_{\max}$ の関係を求めよ. ただし電流が流れる前はコイルの面の法線は $\boldsymbol{B}$ と垂直であるとする. (衝撃検流計の原理.)

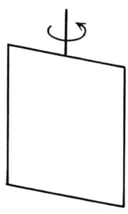


図 3.38

3.15 二つの磁気モーメント $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$ が間隔 r でおかれている. $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$ の配置が図 3.39 の (a) および (b) の場合に, $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$ の間に働く力を求めよ.

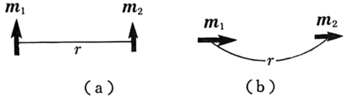


図 3.39

3.16 二枚の平行な平面上を, 反対向きに電流が一様に流れている (§ 3.4 の例3). 電流の強さは, 電流と垂直な単位長さ当たり J とする. 平面の単位面積当たりに働く力を求めよ.

3.17　一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ の中で，電荷 q，質量 m の粒子が $\boldsymbol{B}$ と垂直な平面内で円運動をしている．

（イ）単位時間当たりの回転数（サイクロトロン振動数）ν_c を求めよ．

（ロ）この粒子の運動を円電流とみなして，磁気モーメントを求めよ．ただし円運動の半径を r とする．

（ハ）磁気モーメントと粒子の角運動量の比を求めよ．

3.18　1キロガウスの磁場の中に磁場と垂直な速度で入射した陽子が，曲率半径 1m の円弧を画いて曲げられた．陽子の速度を求めよ．（陽子の質量と電荷は第1章の問題 1.1 参照.）

3.19　導体平面上に，点 O を中心とする渦状の電流分布がある（図 3.40）．O からの距離 ρ と $\rho+d\rho$ の間を流れる電流を $J(\rho)d\rho$ とする．この電流分布が平面のこちら側につくる磁場は，点 O の向こう側の距離 h の点に磁荷 q_m があるときの磁場と同一である．$J(\rho)$ を求めよ．
［ヒント］アンペールの法則を用いる．

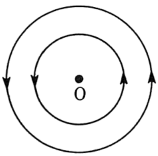


図 3.40

3.20　次のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ はどのような磁場を表すか．

（イ）$A_x=0,\quad A_y=Bx,\quad A_z=0$　　（B は定数）

（ロ）$A_x=-\dfrac{1}{2}By,\quad A_y=\dfrac{1}{2}Bx,\quad A_z=0$　　（B は定数）

（ハ）$A_x=A_y=0,\quad A_z=-\dfrac{\mu_0}{2\pi}I\ln\rho$　　$(\rho=\sqrt{x^2+y^2})$

（ニ）$A_x=-\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{my}{r^3},\quad A_y=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{mx}{r^3},\quad A_z=0$　　$(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

3.21　xy 平面上で原点を中心とする半径 a の円周を C とする．空間の任意の点 P の z 座標を z，z 軸からの距離を ρ とするとき，P が C を見る立体角 Ω は次の積分で表されることを示せ．

$$\Omega=2z\int_0^\pi d\varphi\frac{1}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi}\left(\sqrt{z^2+\rho^2}-\frac{z^2+\rho^2-a\rho\cos\varphi}{\sqrt{z^2+\rho^2+a^2-2a\rho\cos\varphi}}\right)$$

第4章　時間変化する電磁場

静電場や静磁場の場合には，電場と磁場はたがいに独立で両者の間に関係はなかったが，電場・磁場が時間的に変化する場合には，両者は影響を及ぼし合う．この場合の基礎法則は，ファラデイの電磁誘導の法則と，マックスウェルの変位電流の法則である．

§4.1　電磁誘導

電磁誘導の法則　電流が磁場をつくるのであれば，その逆作用として，磁場の中においた回路に電流が流れるのではないかという予想をファラデイは抱いた．この予想自身は正しくなかったが，彼はこの予想の検証を試みる中で，磁場の変化が回路に電流を流すことを発見した（1831 年）．具体的にいえば，ある回路の近くに置いた別の回路に電流を流し始めたり電流を切ったりする場合や，ある回路と電流が流れている別の回路との距離を近づけたり遠ざけたりする場合，またある回路と磁石との距離を近づけたり遠ざけたりする場合に，その回路に電流が流れるのである．流れる電流の強さ自身は回路の抵抗によって変わるので，本質的なのは，回路に起電力が生じることである．

この**電磁誘導**（electromagnetic induction）の現象は，次の法則により統一的に記述される（ノイマン（Neumann）の定式化）．

> 回路を貫く磁束 Φ が増減すると，回路に起電力が誘起される．起電力 $\mathcal{E}$ の大きさは，磁束の時間変化率 $d\Phi/dt$ に比例する．$\mathcal{E}$ の向きは，この起電力によって回路に電流が流れるとき，電流がつくる磁場がはじめの磁束の変化を打ち消すような向きである．

起電力の向きに関する部分は，**レンツ**（Lenz）**の法則**と呼ばれる．磁束 Φ の増減によって回路に誘起される起電力を，**誘導起電力**という．

閉回路 C につけた向きと，C が張る面 S の表裏の関係を，右ねじの規則

により決める．面 S を裏から表へ貫く磁束を Φ とすれば，上に述べた電磁誘導の法則は，k を正の比例定数として

$$\mathcal{E} = -k\frac{d\Phi}{dt} \tag{4.1}$$

と表される．回路を正の向きに流れる電流は S を裏から表へ通る磁束をつくるので，上式の負の符号はレンツの法則を表している．

はじめに述べたように，磁束 Φ の増減はいろいろな原因で起こるが，これを

（i） 磁場自身は静磁場で，その中で回路が動くために Φ の変化が生じる

（ii） 回路は静止していて，磁場が時間変化するために Φ が変化する

という二つの場合に大別できる．もちろん一般には，この二つの組み合わせの場合もある．

ファラデイの実験は，どちらの場合にも回路に誘導起電力が生じることを示した．ところが一見奇妙なことであるが，誘導起電力が生じる機構は，上の二つの場合で異なるのである．

（i）の場合の誘導起電力は，我々がすでに知っている法則，すなわち，磁場の中で動く電荷に働くローレンツの力によって，説明することができる．これを次に示そう．

磁場中で動く回路に生じる誘導起電力　はじめに簡単な例として，x に依存する磁場 $\boldsymbol{B}(x)$ の中で，長方形の導体回路を図 4.1 のように速度 $\boldsymbol{v}$ で動かしてみよう．$\boldsymbol{B}$ の方向は z 方向，$\boldsymbol{v}$ の方向は x 方向とし，辺 1, 3 は $\boldsymbol{v}$ と垂直に保つことにする．

導体中の電荷 q は導体と共に速度 $\boldsymbol{v}$ で動くので，磁場からローレンツの力

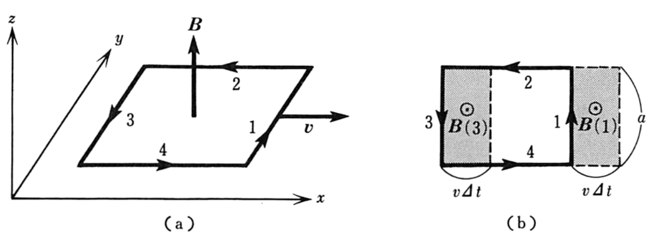


図 4.1 磁場の中で動く回路
（a）辺 1, 3 におけるローレンツ力が起電力の原因となる
（b）回路を貫く磁束の時間変化

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

を受ける．単位電荷に対しては，これは $-y$ 方向を向く大きさ vB の力である．起電力 $\mathcal{E}$ の定義は，単位電荷が回路を一周するときに受ける仕事であることを思い出そう．図の辺 1,3 の長さを a とすれば，単位電荷が矢印の向きに回路を一周するとき，辺 1,3 の上ではそれぞれ仕事 $-avB(1)$，$avB(3)$ を受け，辺 2,4 の上では仕事を受けない．ここで $B(1), B(3)$ は辺 1,3 がある場所の磁場の大きさを表す．したがって起電力は

$$\mathcal{E}=-av(B(1)-B(3)) \tag{4.2}$$

である．

一方，回路を貫く磁束 Φ は，図の（b）からわかるように，微小時間 Δt の間に $(B(1)-B(3))av\Delta t$ だけ増加するから，Φ の変化率は

$$\frac{d\Phi}{dt}=av(B(1)-B(3))$$

である．これを（4.2）とくらべれば

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt} \tag{4.3}$$

という関係が得られる．このように，導体中の電荷に働くローレンツの力から誘導起電力の法則（4.1）が導かれ，かつ，比例定数 k は1であることが示された．

上の考察を一般化するのは難しくない．回路 C の形は任意とし，また回路の運動も平行移動や回転だけでなく，ゴム輪のように回路の形が変わるような運動まで含めて考える（図 4.2）．回路の微小部分 $d\boldsymbol{l}$ の動く速度を $\boldsymbol{v}$ とし，その点における磁場を $\boldsymbol{B}$ とすれば，単位電荷が C を一周するとき微小部分 $d\boldsymbol{l}$ で受ける仕事は $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}$ であるから，起電力は線積分

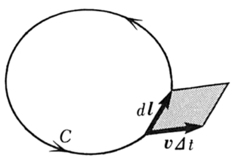


図 4.2 磁場中を動く一般の回路

$$\mathcal{E}=\oint_C(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l} \tag{4.4}$$

で与えられる．一方，微小時間 Δt の間に $d\boldsymbol{l}$ を通って回路の中に入る磁束は $\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{l})\Delta t$ であるから，回路を貫く磁束の増加率は

$$\frac{d\Phi}{dt}=\oint_C \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{l})=-\oint(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}=-\mathcal{E}$$

である．こうして，誘導起電力に関する法則（4.3）が一般に導かれた．

【例 1】 交流起電力 一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ の中で，$\boldsymbol{B}$ と垂直な軸のまわりで回転するコイルを考える（図 4.3）．回転の角速度を ω，コイルの法線と $\boldsymbol{B}$ のなす角を ωt，コイルの面積を S とすれば，コイルを貫く磁束は

$$\Phi=BS\cos\omega t$$

であるから，コイルには

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=\omega BS\sin\omega t$$

の誘導起電力が誘起される．例えば磁場が1キロガウス，コイルの面積が $1\,\mathrm{cm}^2$，回転数が毎秒100回転であれば，$B=0.1\,\mathrm{T}$，$S=10^{-4}\,\mathrm{m}^2$，$\omega=2\pi\times10^2/\mathrm{s}$ により，$\omega BS=2\pi\times10^{-3}\,\mathrm{V}$ である．

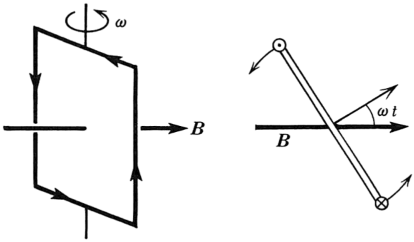


図 4.3 一様な磁場の中で回転するコイル

〔問〕 上記の誘導起電力を，ローレンツの力から導け．

誘 導 電 場 次に（ii）の場合，すなわち時間的に変化する磁場の中で，回路が静止している場合について考える．この場合にも，前の場合と同じ誘導起電力（4.3）が回路に誘起されることが，次のような根拠から期待できる．

第一の根拠は相対性の考えに基づく．いま，図4.4の（a）のように回路を磁石に近づけると，これは前に議論した（i）の場合であるから，誘導起電力（4.3）が回路に生ずる．これに対し図の（b）のように磁石の方を回路に近づけると，回路がある場所の磁場は時間変化するから，これは（ii）の場合に当たる．しかしこの（a）と（b）の差は，単にどの座標系から見ているかというだけの差である．ある座標系が慣性系であれば，それに対して一定速度で動く座標系も慣性系である．二つの慣性系で物理法則は同じ形をとるというのが，ガリレイの相対性である．電磁気学でもガリレイの相対性が成り立つと仮定す

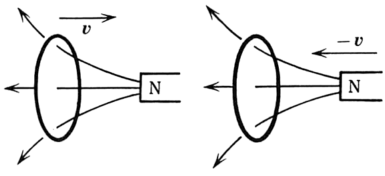


図 4.4 回路と磁石の相対運動

れば，（b）の場合にも，（a）の場合と同じ誘導起電力（4.3）が生じるはずである．

第二の根拠は，エネルギー保存則の傍証としてヘルムホルツ（Helmholtz）が述べたものである．電流 I の回路 C と右ねじ向きにからむ任意の閉曲線 C' に沿って磁荷 q_m を一周させると，アンペールの法則により，磁荷は仕事

$$\oint_{C'} q_m B_l dl = q_m \mu_0 I$$

をされる（図 4.5）．エネルギー保存則が成り立つためには，どこかに仕事源があるはずだが，I が定常電流の場合には一見それらしきものが見当たらないというのが § 3.3 の宿題であった．

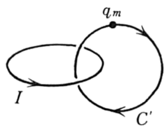


図 4.5 電流を一周する磁荷

この問題を解決するのは電磁誘導の法則である．磁荷 q_m はその周囲にクーロン磁場 $\boldsymbol{B}'$ をつくる．$\boldsymbol{B}'$ の磁束の総量は $\mu_0 q_m$ である（クーロン磁場に対するガウスの法則）．q_m から出た磁束の一部は，電流回路 C を貫く．それを Φ' としよう．q_m が道 C' に沿って動くと C の付近の $\boldsymbol{B}'$ が変化し，それに伴い Φ' が変化する．磁場が時間変化する場合にも誘導起電力（4.3）が誘起されると仮定すれば，回路 C には起電力

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi'}{dt}$$

が生じる．そこで，回路 C に定常電流 I を流し続けるためには，回路 C に外から余分な起電力

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ext}} = -\mathcal{E} = \frac{d\Phi'}{dt}$$

を加えて，$\mathcal{E}$ を打ち消さなければならない．q_m が C' を一周する間に，外部起電力 $\mathcal{E}_{\mathrm{ext}}$ は電流 I に仕事

$$\int \mathcal{E}_{\mathrm{ext}} I dt = I \int \frac{d\Phi'}{dt} dt = I \Delta\Phi'$$

を行う．$\Delta\Phi'$ は，q_m が C' を一周するときの磁束 Φ' の変化であり，これは明らかに $\mu_0 q_m$ に等しい．したがって外部起電力がする仕事は

$$\int \mathcal{E}_{\mathrm{ext}} I dt = \mu_0 q_m I$$

となり，磁荷 q_m が受ける仕事と一致する．

上の議論は磁荷という未発見のものを用いる点に難点があるが，見方を変えれば，電磁気学は磁荷が存在しても矛盾を生じないようにできた体系であるということもできよう．

いずれにせよ，自然法則の当否を最終的に判定するのは実験であり，磁場が時間的に変化する場合にも回路に誘導起電力

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

が生じることは，実験によって確かめられている．

さて，いまは回路が静止しているので，導体中の電荷は磁場からは力を受けない．それゆえ，誘導起電力の形は回路が動く場合と見かけ上同じであるが，その原因は別の所に求めなければならない．静止した電荷に力を及ぼすのは電場であるが，第2章で強調したように，クーロン電場（静電場）は起電力の原因にはなれない．そこで磁場が時間変化するときには，それに伴って新しい型の電場がつくられ，それが起電力の原因になると考えるのが自然である．この電場を**誘導電場**と呼ぶ．

この考えによれば，単位電荷が回路 C を一周するとき誘導電場 $\boldsymbol{E}$ から受ける仕事

$$\mathcal{E} = \oint_C E_l dl$$

が誘導起電力である．したがって誘導電場 $\boldsymbol{E}$ は

$$\oint_C E_l dl = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{4.5}$$

を満たさなければならない．回路 C を貫く磁束 Φ は，C を縁とする曲面 S 上の積分

$$\Phi = \int_S B_n dS$$

で与えられるので，(4.5) は

$$\oint_C E_l dl = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \tag{4.6}$$

とも書ける．

磁場の時間変化が誘導電場をひき起こすとすれば，それは電流回路の有無には無関係にできるはずである．したがって (4.6) は，単に電流回路に対してだけではなく，空間の任意の閉曲線 C に対して成り立つ関係とみなすべきである．渦無しの条件

$$\oint_C E_l dl = 0$$

が成り立たないため，誘導電場は静電場とは大きく異なる．最も大きな差は，誘導電場に対しては（位置の一価関数としての）電位が存在しないことである．

磁場に時間変化がある場合にも，電場に対するガウスの法則

$$\int_S E_n dS = \int_V \rho dV \tag{4.7}$$

はそのままの形で成り立つと仮定すれば，(4.6) と (4.7) が電場が満たすべき基礎法則である．

(4.6) において C を微小な閉曲線にとれば，§1.7 と同様な議論により，(4.6) の微分形

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4.6$'$}$$

を導くことができる．これとガウスの法則

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \tag{4.7$'$}$$

が，電場に対する基礎法則を微分形で表した式である．

誘導電場の具体的な形　　これまで，電場 $\boldsymbol{E}$ が満たすべき基礎法則をやや抽象的に考察してきたが，では，実際に時間変化する磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ があるとき，どのような電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ ができるであろうか．これは結局，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ が与えられたとき，(4.6) と (4.7) を満たす電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ を求めるという問題である．誘導電場にとって電荷の存在は本質的でないので，電荷分布は存在しない場合を考えることにすれば，(4.7) は

$$\int_S E_n dS = 0 \tag{4.8}$$

となる．S は任意の閉曲面である．したがって，(4.6) と (4.8) とから電場

を求めることが問題になる．

これに対する解答は，次の類推から容易に得られる．§ 3.4 で学んだように，定常電流を源とする磁場に対する基礎法則は，アンペールの法則

$$\oint_C B_l dl = \mu_0 \int_S j_n dS \tag{4.9}$$

と発散に対する条件

$$\int_S B_n dS = 0 \tag{4.10}$$

であり，これを満たす $\boldsymbol{B}$ はビオ・サバールの磁場である．

ところが定常電流の磁場に対する (4.9), (4.10) と，誘導電場に対する (4.6), (4.8) を比較すると，両者は全く同じ形の式であり，前者から形式的なおきかえ

$$\mu_0 \boldsymbol{j} \longrightarrow -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad , \quad \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{E}$$

によって後者が得られる．したがって (4.6), (4.8) を満たす誘導電場も，ビオ・サバールの磁場から上のおきかえによって得られることになる．要するに，$-\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ を電流密度とみなして，それがつくるビオ・サバールの磁場を考えればよいのである．

【例 2】 ソレノイドの磁場の時間変化に伴う誘導電場　半径 a の無限に長いソレノイドの内部の磁場が時間と共に変化するとき，ソレノイドの内外にできる誘導電場を求める．§ 3.3, § 3.4 で学んだように，ソレノイドの内部には軸方向を向く一様な磁場ができる．この磁場を $B(t)$ とし，その変化率を $\partial B/\partial t \equiv \dot{B}$ で表す．上で説明したように，これは，半径 a の導体円柱の内部に一様な電流密度 $j = -\mu_0{}^{-1}\dot{B}$ で電流が軸方向に流れるとき，導体内外にできる磁場を求めることと同等である．したがって誘導電場は軸対称な渦状の場で，その大きさは軸からの距離 ρ のみによる．(4.6) の積分路 C として軸を中心にする円をとれば電場は容易に計算でき，次の結果が得られる．

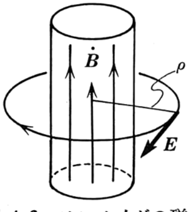


図 4.6　ソレノイドの磁場の時間変化によって生じる誘導電場

$$E(\rho) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dot{B}\rho & \rho \leqq a \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\dot{B}\dfrac{a^2}{\rho} & \rho \geqq a \end{cases}$$

負の符号は，$\dot{\boldsymbol{B}}$ と電気力線が左ねじの関係にあることを表す．磁場が変化するときソレノイドの導線に生じる誘導起電力は，この誘導電場に基づく．

時間変化する磁場の中に荷電粒子を入れると，荷電粒子は円運動をしながら誘導電場で加速される．**ベータトロン**はこの原理で電子を加速する装置である．

磁場が誘導電流に及ぼす力　再び，静磁場中で回路が動く場合に戻る．この場合の誘導起電力は，導体中の電荷に対してローレンツ力が行う仕事（4.4）によって説明された．ところが本来ローレンツ力は，電荷の速度と垂直に働くため電荷に仕事をしないはずである．上の説明には，どこかに抜け穴があるのだろうか．

起電力の式（4.4）で，$\boldsymbol{v}$ は回路の速度であり，$d\boldsymbol{l}$ は電荷が回路に沿って動く変位である．このことから，回路に誘導電流が流れるときには，電荷の速度として，回路と共に動く速度 $\boldsymbol{v}$ のほかに，電流として回路に沿って動く速度 $\boldsymbol{v}_{//}$ を考慮に入れなければならないことに気づく．電荷の速度は両者の和

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_{//}$$

であり，電荷 q に働くローレンツ力は

$$q\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}+q\boldsymbol{v}_{//}\times\boldsymbol{B} \tag{4.11}$$

である．起電力（4.4）にとり入れたのは（4.11）の右辺の第一項である．一方，第二項を電流の電荷について加え合わせたものは，磁場が誘導電流に及ぼす力にほかならない．

図 4.1 の例で見ると，誘導起電力 $\mathcal{E}$ のために回路に電流 I が流れるとすれば，磁場が電流に及ぼす力の合力は

$$\boldsymbol{F}=aI(B(1)-B(3))\hat{\boldsymbol{v}}$$

である．簡単のため回路は電気抵抗 R のみを持つとすれば $I=\mathcal{E}/R$ であるから，$\mathcal{E}$ の表式（4.2）により上式は

$$\boldsymbol{F}=-\frac{1}{R}a^2(B(1)-B(3))^2\boldsymbol{v} \tag{4.12}$$

と書ける．すなわち磁場が誘導電流に及ぼす力は，回路の運動を妨げる向きに摩擦力のように働く．これは磁場中における回路の運動に対し一般に成り立つ事実で，これもレンツの法則と呼ばれる．

磁場が誘導電流に及ぼす力（4.12）の仕事率 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$ は，（4.2）を用いれば

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=-\mathcal{E}I$$

と表せる．これを

$$\mathcal{E}I+\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{4.13}$$

と書けば，左辺の二つの項は，磁場が導体中の電荷に及ぼすローレンツ力（4.11）の各項の仕事率に対応し，上式はその和がゼロであることを意味する．

すなわちローレンツ力は，全体としては仕事をしない．

摩擦力（4.12）に逆らって回路を動かすには，（4.12）を打ち消す外力

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}=-\boldsymbol{F}$$

を回路に加える必要がある．この外力の仕事率は，（4.13）により

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}\cdot\boldsymbol{v}=\mathcal{E}I$$

である．すなわち，誘導起電力 $\mathcal{E}$ が行う仕事は，実は外力が行う仕事が転化したものである．磁場は単に，外力がなす機械的な仕事を電気的な仕事に変換する仲介者の役をしているだけである．

回路の一般の運動に対しても，全く同じことがいえる．誘導起電力によって回路に電流 I が流れれば，磁場 $\boldsymbol{B}$ は回路の微小部分 $d\boldsymbol{l}$ に力 $Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ を及ぼす．この力に逆らって $d\boldsymbol{l}$ を動かすには $d\boldsymbol{l}$ に外力 $-Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ を加える必要があり，$d\boldsymbol{l}$ が速度 $\boldsymbol{v}$ で動くとき，外力は仕事率 $-I(d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}$ の仕事をする．これを回路全体について加えると，（4.4）により

$$-I\oint(d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}=I\oint(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}=\mathcal{E}I$$

を得る．すなわち，外力の仕事率は誘導起電力 $\mathcal{E}$ の仕事率に一致する．

【例 3】 交流起電力（続） 例1の回転するコイルに電流 I が流れるならば，コイルは磁気モーメント

$$\boldsymbol{m}=IS\boldsymbol{n}$$

を持つので（$\boldsymbol{n}$ はコイルの法線），磁場はコイルにトルク

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$$

を及ぼす（§ 3.5 参照）．回転軸方向の成分で書けば，これは

$$N=-ISB\sin\omega t$$

と表せる．このトルクに逆らってコイルを回転させるには，コイルに外からトルク $N_{\mathrm{ext}}=-N$ を加えなければならない．N_{ext} の仕事率は

$$N_{\mathrm{ext}}\omega=\omega ISB\sin\omega t=\mathcal{E}I$$

で，交流起電力 $\mathcal{E}$ の仕事率に一致する．発電機の場合には，N_{ext} は水力・火力などによるトルクである．

渦 電 流 誘導起電力により誘導電流が流れるのは，導線からできた回路に限るわけではない．板のような広がりのある導体が磁場中で動いたり，それを貫く磁場が時間変化したりする場合には，導体内部に環状の誘導電流が流れる．一般に広がりのある導体中に流れる誘導電流を，**渦電流**（eddy current）と呼ぶ．

図 4.7 に示す磁石の両極ではさんだ導体円板を中心軸のまわりに回転させると，磁場のローレンツ力により円板中に誘導起電力が生じ，図に示すような渦電流が流れる．磁場がこの渦電流に及ぼす力は，渦電流を板磁石でおきかえれば直ちにわかるように，回転を減速する向きのトルクを円板に与える（レンツの法則）．このトルクが円板の角速度に比例することは明らかであろう．渦電流によるこの制動作用は，使用電力の積算値を測る電力量計などに応用されている．

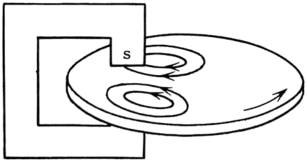


図 4.7　渦電流．円板を矢印の向きに回転させる

磁石の方を円板のへりにそって（先程の円板の回転とは逆向きに）動かす場合にも，やはり同じ渦電流が流れ，円板は磁場からトルクを受けて磁石と同じ向きに回転する．この現象をアラゴ（Arago）の円板という．誘導電動機はこの原理を応用したもので，回転磁場によって導体円筒上に流れる渦電流に磁場が及ぼすトルクを回転力に利用する．

〔注意〕（i）本節では，誘導起電力 (4.3) が，静磁場中で回路が動く場合と，回路は静止し磁場が時間変化する場合とでは，異なる原因によって生じることを強調した．しかしこの二つの原因，すなわち磁場によるローレンツ力と誘導電場による力は，全く無関係ではない．図 4.4(a) のように回路が並進運動をする場合には，たがいに等速運動をする二つの慣性系（a），(b）は，特殊相対性理論のローレンツ変換によって結びつけられる．相対性理論によれば，座標系（a）から（b）へ移るとき電場・磁場は不変ではなく，一定の規則に従い変換する．座標系（a）では静磁場だけが存在するのに対し，座標系（b）では誘導電場が現れるのはそのためである．それゆえローレンツ力と誘導電場による力は，物理的には同一の現象を二つの座標系で見た記述ということができる．

回路が回転をする場合には事情はやや複雑である．図 4.7 の例でいえば，円板と磁石のどちらが回転しても，(4.3) による同一の誘導起電力が円板に生じる．（発電機には，コイル（電機子）を回転させる型と磁石（界磁）を回転させる型の両方がある．）この場合には，円板に固定した座標系は磁石に固定した座標系から見れば回転座標系であり，両者はローレンツ変換では結ばれない．電磁誘導の相対性は，ローレンツ変換に対する相対性よりも広い範囲で成り立つのである．

（ii）本節の議論は，閉回路に誘起される誘導起電力の表式 (4.3) から出発して進められた．しかし一般の電流回路は，直流回路の意味で閉じている必要はない．例えばコンデンサーを含む回路は直流回路の意味では閉じていない．この場合にはコ

ンデンサーによる回路の隙間は極めて僅かであるから，ローレンツ力や誘導電場によって導線上に生じる誘導起電力は，非常に良い近似で（4.3）で表される．もっと極端な例として，短い直線状の針金が磁場中を動く場合を考えてみよう．このときも，ローレンツ力により針金に起電力が生じ電荷が移動する．その結果針金に電荷分布ができ，それがつくる静電場がローレンツ力を打ち消す状態で電荷の移動が終わる．したがって針金の両端には起電力に等しい電位差が現れる．針金が磁場中で往復運動をする場合には電荷の移動は終わらず，振動電流が流れるであろう．このような問題では，起電力の表式（4.3）は使えない．

誘導起電力を表す（4.3）は非常に有用な表式であるが，電磁誘導の問題に対し万能ではない．場合によっては，ローレンツ力や誘導電場から直接考察する必要がある．

§ 4.2　磁場のエネルギー

第3章で定常電流がつくる磁場を考察したとき，電流がもつエネルギー，すなわち磁場のエネルギーにはふれなかった．その理由は，エネルギーを求めるには，磁場の無い状態から磁場をつくり上げる過程を考えることが必要であるが，その過程では磁場の変化による電磁誘導が本質的な役割をするからである．

逆起電力　図4.8に示す電気抵抗 R と起電力 $\mathcal{E}$ の電池からなる回路を考える．この回路に流れる定常電流はもちろん $I_\infty=\mathcal{E}/R$ であるが，例えば $t=0$ にスイッチを入れたとして，電流は瞬間的にこの値に達するのであろうか．物体の運動の場合には，ある時刻から力を加えると，物体の速度はゼロから連続的に増加する．この類推からいえば，電流が不連続にゼロから I_∞ へ変化するのは不自然である．

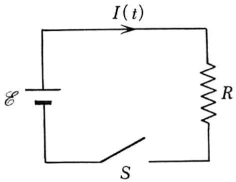


図 4.8　直流回路

物体の運動で速度が連続的に変化するのは，物体が慣性，すなわち質量を持つためである．実は電流回路の場合にも慣性に相当するものがあって，その結果電流は連続的に変化するのである．

回路に電流 I が流れると I は磁場をつくる．この磁場の磁力線はすべてその回路と絡む（図 4.9）．すなわち，回路を貫く磁束 Φ は I がつくる全磁束に等しい．電流 I がつくる磁場は I に比例するので，磁束 Φ も I に比例す

る．これを

$$\Phi = LI \qquad (4.14)$$

と表して，比例定数 L を回路の **自己インダクタンス**という．自己インダクタンスの単位は Wb/A であるが，これをヘンリー（H）と呼ぶ．

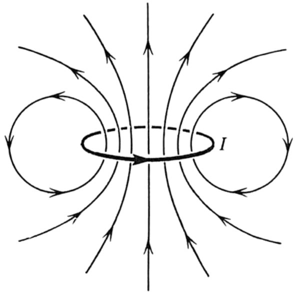


図 4.9　電流回路と磁力線

スイッチを入れる前はもちろん $\Phi=0$ である．スイッチを入れて電流が流れると，その間に回路を貫く磁束 Φ が変化するから，電磁誘導により回路に起電力を生ずる．時刻 t における電流を $I(t)$ とすれば，この誘導起電力は

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad (4.15)$$

となる．一般に電流の変化によって生じる誘導起電力を**逆起電力**と呼ぶ．

電流が変化している間は，電池の起電力 $\mathcal{E}$ のほかに逆起電力 $\mathcal{E}_c$ があるので，オームの法則は

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_c = RI$$

という形をとる．これに（4.15）を代入すれば

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E} \qquad (4.16)$$

となる．こうして，電流の時間変化を定める微分方程式が得られた．

これは非同次の線形微分方程式であるから，その一般解は，同次方程式（右辺をゼロとおいた方程式）の一般解と，もとの方程式の特解の和の形で与えられる．同次方程式の一般解は

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

であり（A は任意定数），もとの方程式の特解としては

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \equiv I_\infty$$

がとれるから，（4.16）の一般解は

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + I_\infty$$

である．初期条件を $I(0)=0$ とおけば任意定数 A が定まり，結局，電流の

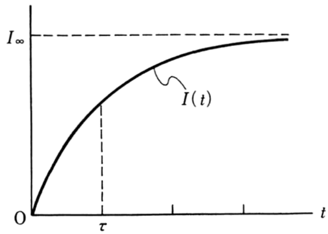


図 4.10

時間変化は

$$I(t)=I_\infty(1-e^{-\frac{R}{L}t}) \tag{4.17}$$

の形に表される（図 4.10).

図からわかるように，電流 I の値が定常的な値 I_∞ に達するには，ほぼ $\tau\equiv L/R$ の時間を要する．自己インダクタンス L が大きい程，この立ち上がりの時間は長い．すなわち自己インダクタンスは，回路にとって慣性の役割を持つ．τ を回路の**時定数**という．

〔**問**〕 $\tau=L/R$ の単位が秒であることを確かめよ．

電流のエネルギー　図 4.8 の回路で，電池の起電力 $\mathcal{E}$ がする仕事を考えよう．(4.16) の両辺に I をかけた式

$$LI\frac{dI}{dt}+RI^2=\mathcal{E}I$$

は，

$$\mathcal{E}I=RI^2+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) \tag{4.18}$$

と書き換えられる．上式の左辺は，起電力 $\mathcal{E}$ が単位時間に行う仕事，すなわち仕事率を表す．右辺の第一項はジュール熱で，電流が時間的に一定の場合には第二項は消えるから，(4.18) は，電池がする仕事がジュール熱に転化するというエネルギー保存則を表す．ところが電流が時間的に変化している場合には，(4.18) によれば，仕事率 $\mathcal{E}I$ のうち一部分はジュール熱となり，残りは $LI^2/2$ という量の増加に使われる．この結果を自然に解釈するには，回路を流れる電流 I がエネルギー

$$U=\frac{1}{2}LI^2 \tag{4.19}$$

を持つと考えればよい．(4.14) を用いれば，上式は

$$U=\frac{1}{2}\Phi I \tag{4.20}$$

とも書ける．これは，導体が持つ静電エネルギー

$$U=\frac{1}{2}QV$$

に対応する式である．(§ 1.6 の (1.51) 参照.)

回路のスイッチを切るときに発生するスパークは，電流のエネルギーが転化したものである．

【例 1】 ソレノイドの自己インダクタンス　ソレノイドの長さを l，断面積を S，単位長さ当りの導線の巻数を n とする．l がソレノイドの半径にくらべて十分に長ければ，ソレノイドの内部の磁場は，無限に長いソレノイドの磁場で近似できる．すなわち磁場はいたる所で一様で軸方向を向き，その大きさは電流を I とすれば $B=\mu_0 nI$ である．ソレノイドの断面を通る磁束は SB で，一本の磁力線が回路と nl 回絡むことに注意すれば，回路を貫く磁束 Φ が

$$\Phi=nlSB=\mu_0 n^2 SlI$$

であることがわかる．したがって自己インダクタンスは

$$L=\mu_0 n^2 Sl=\mu_0 n^2\times\text{体積} \tag{4.21}$$

である．(実際には l が有限であるため，一部の磁力線はソレノイドの側壁から外へ洩れる．そのため L の値は (4.21) よりも小さくなる．)

例として直径 1cm，長さ 5cm の円筒に導線を100回巻いたソレノイドを考えると，(4.21) に $n=2\times10^3$/m，$S=0.25\pi\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2$，$l=5\times10^{-2}$ m，$\mu_0/4\pi=10^{-7}$ H/m を代入して，$L\fallingdotseq2.0\times10^{-5}$ H を得る．このソレノイドに 1A の電流が流れるとき，電流のエネルギーは $LI^2/2\fallingdotseq10^{-5}$ J である．

LCR 回路の固有振動　自己インダクタンス L のコイル，容量 C のコンデンサー，および電気抵抗 R を直列につないだ回路を考える (図 4.11)．時刻 t に回路に流れる電流を $I(t)$，コンデンサーに帯電する電荷を $\pm Q(t)$ とすれば

$$I=\frac{dQ}{dt} \tag{4.22}$$

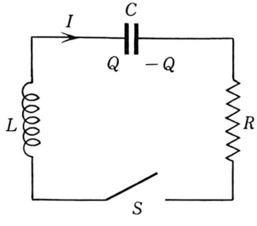


図 4.11　LCR 回路

の関係がある．コンデンサーの両端の電位差は Q/C，抵抗の両端の電位差は RI であるから，この和をコイルの逆起電力 $-L(dI/dt)$ と等置すれば

$$\frac{Q}{C}+RI=-L\frac{dI}{dt}$$

を得る．(4.22) を代入すれば，これは二階線形微分方程式

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=0 \tag{4.23}$$

となる．$\omega_0=1/\sqrt{LC}$，$\gamma=R/2L$ とおけば，上式は

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+2\gamma\frac{dQ}{dt}+\omega_0{}^2Q=0 \tag{4.24}$$

と表せる．

$R=0$，すなわち $\gamma=0$ の場合には，(4.24) の一般解は調和振動

$$Q(t)=A\cos(\omega_0 t+\delta) \tag{4.25}$$

である．$R\neq 0$ の場合の解を求めるために

$$Q(t)=e^{pt} \tag{4.26}$$

と置いて (4.24) に代入すると

$$(p^2+2\gamma p+\omega_0{}^2)e^{pt}=0$$

となる．したがって (4.26) が (4.24) を満たすためには，p は

$$p^2+2\gamma p+\omega_0{}^2=0$$

の解，すなわち $p=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0{}^2}$ でなければならない．いま抵抗 R が小さくて根号の中が負になる場合を考えることにして

$$p=-\gamma\pm i\sqrt{\omega_0{}^2-\gamma^2}\equiv-\gamma\pm i\omega_1$$

とおけば，上で得た (4.24) の二つの独立な解は

$$Q(t)=e^{-\gamma t}e^{\pm i\omega_1 t}$$

と表せる．

(4.24) は線形の方程式であるから，二つの解があればその任意の一次結合も解である．オイラーの公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{4.27}$$

すなわち

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \quad , \quad \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$$

を用いれば，A_1, A_2 を任意定数として

$$Q(t)=e^{-\gamma t}(A_1\cos\omega_1 t+A_2\sin\omega_1 t)$$

も解であることがわかる．上式は

$$Q(t)=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\delta) \tag{4.28}$$

の形に表すこともできる．二つの任意定数 A,δ を含む解（4.28）が（4.24）の一般解である．

複素数の関数に慣れない読者は，（4.27）を虚数の指数関数 e^{ix} の定義だと思えばよい．三角関数の微分の公式および加法定理から，公式

$$\frac{d}{dx}e^{ix}=ie^{ix}$$

$$e^{ix_1}e^{ix_2}=e^{i(x_1+x_2)}$$

が成り立つことは容易に確かめられる．このように，虚数（一般には複素数）の指数関数は実数の指数関数と同じ性質を持つ．（4.26）と置いて解を求めたとき，この事実を用いたのである．

一般解（4.28）は，振幅が時間と共に小さくなる減衰振動を表す．特に抵抗 R が小さい極限では，（4.28）は固有角振動数 $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ の調和振動（4.25）に帰着する．

方程式（4.23）は，図 4.12 に示す機械系の振動，すなわち質量 m がバネの力 $-kx$ および速度に比例する摩擦力 $-\Gamma\dot{x}$ を受けながら行う振動の方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\Gamma\frac{dx}{dt}+kx=0 \tag{4.29}$$

と同じ形を持つ．（4.29）と（4.23）の比較から導かれる機械系と電気回路の間の対応を，表 4.1 にまとめておく．この類推は，いろいろな電気回路の働き



図 4.12
機械振動系

表 4.1　機械系と LCR 回路の対応

機械系		電流回路	
変位	x	電荷	Q
速度	$\dot{x}$	電流	I
質量	m	インダクタンス	L
バネ定数	k	電気容量の逆数	$1/C$
固有角振動数	$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$	固有角振動数	$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$
運動エネルギー	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2$	電流のエネルギー	$\frac{1}{2}LI^2$
位置のエネルギー	$\frac{1}{2}kx^2$	静電エネルギー	$\frac{1}{2C}Q^2$

を定性的に理解する上で有用である．本節の始めに述べたように自己インダクタンスは電流回路の慣性を表すが，そのことは表4.1を見れば一目瞭然である．

電流系　これまでの議論を，環状電流が二つ以上ある場合に一般化しよう．回路に番号 $i=1,2,\cdots$ をつけ，回路 j の電流 I_j がつくる磁場の磁束のうち，回路 i を貫く分を Φ_{ij} とする．Φ_{ij} は電流 I_j に比例するので，これを

$$\Phi_{ij}=L_{ij}I_j$$

とおく．比例定数 L_{ij} を一般に**誘導係数**と呼び，$i\neq j$ に対する L_{ij} を**相互インダクタンス**と呼ぶ．L_{ii} は回路 i の自己インダクタンスである．回路 i を貫く磁束の総和は

$$\Phi_i=\sum_j\Phi_{ij}=\sum_j L_{ij}I_j$$

であるから，回路 i には誘導起電力

$$\mathcal{E}_{ci}=-\frac{d\Phi_i}{dt}=-\sum_j L_{ij}\frac{dI_j}{dt}$$

が誘起される．

簡単のため，回路の数が二個の場合を考える．回路 1，2 の電源の起電力を $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2$ とし，電気抵抗を R_1,R_2 とすれば，二つの回路に対するオームの法則は，(4.16) と同様に

$$L_{11}\frac{dI_1}{dt}+L_{12}\frac{dI_2}{dt}+R_1I_1=\mathcal{E}_1$$

$$L_{21}\frac{dI_1}{dt}+L_{22}\frac{dI_2}{dt}+R_2I_2=\mathcal{E}_2$$

と書ける．起電力 $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2$ の仕事率の和は，上の二式から

$$\mathcal{E}_1I_1+\mathcal{E}_2I_2=R_1I_1^2+R_2I_2^2+L_{11}I_1\frac{dI_1}{dt}+L_{22}I_2\frac{dI_2}{dt}$$
$$+L_{21}I_2\frac{dI_1}{dt}+L_{12}I_1\frac{dI_2}{dt}$$

となる．右辺の最初の二項はジュール熱であるから，エネルギー保存則が成り立つためには，残りの部分が，ある量の時間微分の形にまとまる必要がある．しかし上の式は，そのままではそうなっていない．ある量の時間微分の形に書けるのは，

$$L_{12}=L_{21} \tag{4.30}$$

という条件が満たされるときだけである．（数学ではこれを積分可能条件とい

う.）そこで上の条件が成り立っているとして $L_{12}=L_{21}=M$ とおき，また $L_{11}\equiv L_1$，$L_{22}\equiv L_2$ と記すことにすれば，上の仕事率の式は

$$\mathcal{E}_1 I_1+\mathcal{E}_2 I_2=R_1 I_1{}^2+R_2 I_2{}^2+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 I_1{}^2+\frac{1}{2}L_2 I_2{}^2+MI_1 I_2\right)$$

と表される．この式から，この電流系は，エネルギー

$$U=\frac{1}{2}L_1 I_1{}^2+\frac{1}{2}L_2 I_2{}^2+MI_1 I_2 \tag{4.31}$$

を持つと解釈できる．回路 1,2 を貫く磁束がそれぞれ

$$\Phi_1=L_1 I_1+MI_2$$
$$\Phi_2=MI_1+L_2 I_2$$

であることに注意すれば，(4.31) を

$$U=\frac{1}{2}\Phi_1 I_1+\frac{1}{2}\Phi_2 I_2 \tag{4.32}$$

と表すこともできる．

条件 (4.30) は，回路 1 に 1A の電流が流れるときに回路 2 を貫く磁束と，回路 2 に 1A の電流が流れるときに回路 1 を貫く磁束とが等しいことをいうもので，一般に**相反性** (reciprocity) と呼ばれる定理の一例である．上ではこの著しい性質をエネルギー保存則から導いたが，相互インダクタンスの定義から直接導くことも可能である．

磁場のエネルギー密度　§ 1.6 で，静電気力に対するファラデイの近接作用の見方について述べた．電流の間に働く力も，近接作用の見方によれば，磁力管が長さを縮め断面を広げようとする働きによって伝えられる．（磁力管の圧力の例は § 3.5 で学んだ.）磁力管が弾性体に似た性質を持つならば，電流系のエネルギーは，磁場と共に空間に連続的に分布しているはずである．ここではそのような解釈が矛盾なくできるかどうかを見ることにしよう．

まず簡単な例として，無限に長いソレノイドを流れる電流のエネルギーについて調べる．電流のエネルギーの式 (4.19) と自己インダクタンス (4.21) から，電流のエネルギーは

$$U=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2\times \text{ソレノイドの体積}$$

と表せる．ソレノイドの内部の磁場は $B=\mu_0 nI$ であるから，上の結果は，ソレノイドの内部にエネルギーが単位体積当たり

$$u=\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{4.33}$$

の密度で分布しているものと解釈できる．

一般の回路を流れる電流のエネルギーも，エネルギー密度 (4.33) で分布する磁場のエネルギーとみなすことができる．それを確かめるため，§1.6 で電場のエネルギーについて調べたときと同様に，(4.33) から出発して，前に求めた電流のエネルギーの表式が再現できることを示そう．

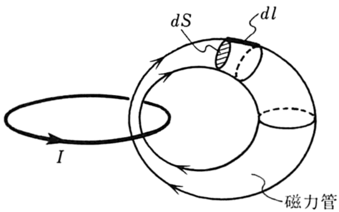


図 4.13　磁力管の体積要素

（i）　単独の回路の場合　　図 4.13 のような簡単な環状回路 C を考えると，C の電流 I による磁力線は，すべて C と一回ずつ絡む．（ソレノイドの場合には磁力線が回路と何回も絡むが，そのような回路は図 4.13 の形の回路に分けて考えればよい．）磁力線を適当に磁力管にまとめると，空間全体は磁力管で埋めつくされる．そこでまず一本の磁力管の内部に含まれる磁場のエネルギーに着目する．磁力管の微小部分の長さを dl，断面積を dS とすれば，磁力管内部のエネルギーは

$$dU=\int_{\text{磁力管}}\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2dV=\int\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2dSdl$$

と表される．一本の磁力管の上では BdS は一定で，その磁力管の内部の磁束 $d\Phi$ に等しいから，これを積分の外に出せば

$$dU=\frac{1}{2\mu_0}d\Phi\oint Bdl$$

となる．磁力管は端の無い閉じた管であるから，上の積分は磁力線に沿う一周線積分になる．アンペールの法則によりこの線積分は $\mu_0 I$ に等しいので，上式は

$$dU=\frac{1}{2}Id\Phi$$

と書ける．

ここですべての磁力管の寄与を加える．各磁力管は回路 C と一回ずつ絡むので，$d\Phi$ の和は C を貫く磁束 Φ を与える．したがって，磁場のエネルギーは

$$U=\frac{1}{2}I\Phi=\frac{1}{2}LI^2$$

となり，(4.19) と一致する．

（ii）二個の回路の場合　　空間の任意の点 $\boldsymbol{r}$ の磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は回路 C_1 の電流 I_1 による磁場 $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r})$ と，回路 C_2 の電流 I_2 による磁場 $\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r})$ の重ね合わせ

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r})$$

であるから，エネルギー密度は

$$u=\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2=\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}_1{}^2+\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}_2{}^2+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{B}_2$$

と表される．この u の全空間にわたる積分が，(4.31) に一致することを示そう．(i) の場合の議論から，上式右辺の第一項と第二項の空間積分はそれぞれ $L_1I_1{}^2/2$, $L_2I_2{}^2/2$ となることが示されているので，第三項の積分が

$$U_{12}\equiv\int\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{B}_2dV=MI_1I_2 \tag{4.34}$$

となることを示せばよい．

この積分をするため，空間を $\boldsymbol{B}_2$ の磁力管に分け，まず一本の磁力管に着目する．磁力管上の任意の点で，磁力管の方向の $\boldsymbol{B}_1$ の成分を B_{1l} で表す．$\boldsymbol{B}_2$ はもちろん磁力管と平行であるから，この磁力管の内部での積分は

$$dU_{12}=\frac{1}{\mu_0}\int_{\text{磁力管}}B_{1l}B_2dSdl$$

と書ける．ここで，$B_2dS=d\Phi$ は磁力管の上で一定であることに注意すれば，この積分は

$$dU_{12}=\frac{1}{\mu_0}d\Phi\oint_C B_{1l}dl$$

と表せる．線積分の道 C は，今考えている $\boldsymbol{B}_2$ の磁力線である．アンペールの法則によれば，C が回路 C_1 を貫けばこの線積分は μ_0I_1，貫かなければゼ

ロである．すなわち

$$dU_{12}=I_1 d\Phi\times\begin{cases}1 & (C\text{ が }C_1\text{ と絡むとき})\\ 0 & (C\text{ が }C_1\text{ と絡まないとき})\end{cases}$$

この結果をすべての磁力管について加えると，C_1 を貫く磁場 $\boldsymbol{B}_2$ の磁束が $L_{12}I_2$ であることから

$$U_{12}=L_{12}I_1I_2$$

を得る．

空間を $\boldsymbol{B}_2$ の磁力管で分ける代りに $\boldsymbol{B}_1$ の磁力管で分けて上と同じ計算を行えば，結果は

$$U_{12}=L_{21}I_1I_2$$

となるから，再び $L_{12}=L_{21}$ が示され，(4.34) が再現された．

§ 4.3 変位電流，マックスウェルの方程式

これまでに得られた電場，磁場の基礎法則をまとめておこう．電場に対する法則は，ガウスの法則

$$\varepsilon_0\int_S E_n dS=\int_V \rho dV \tag{4.35}$$

および電磁誘導の法則

$$\oint_C E_l dl=-\int_S\frac{\partial B_n}{\partial t}dS \tag{4.36}$$

の二つで，磁場に対する法則は，磁場のガウスの法則

$$\int_S B_n dS=0 \tag{4.37}$$

およびアンペールの法則

$$\oint_C B_l dl=\mu_0\int_S j_n dS \tag{4.38}$$

の二つである．微分形で書けば，これらの法則は

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho \tag{4.35$'$}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4.36$'$}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{4.37$'$}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{4.38$'$}$$

と表される．

上の法則の中で，電磁誘導の法則（4.36）以外の三つの法則は，本来，時間変化のない静電場，静磁場に対して得られたものである．そこで問題になるのは，時間変化する一般の電場・磁場に対しても，この三つの法則がそのまま成り立つかどうかということである．もちろんこれは実験によって判定すべきことであるが，もしある式が何等かの内部矛盾を含むことがわかれば，実験に問うまでもなくそれは法則として不適格ということになる．実際，マックスウェルは，アンペールの法則（4.38）に問題があることを指摘した．

変位電流　アンペールの法則（4.38）で，C は任意の閉曲線，S は C が張る任意の曲面を意味する．（4.38）の右辺の積分は C を貫く電流を表し，それが左辺の循環を定めるというのが（4.38）の意味である．したがって右辺の面積分は，曲面 S として C を縁にするどんな曲面をとっても，同じ値を与える必要がある．

定常電流の場合には，空間（すなわち導体中）の電流分布は，端のない環状電流の集まりである．もし電流に端があれば，その点に電荷がたまっていくので電場は時間と共に変わり，電流は定常ではあり得ない．すべての電流が環状電流であれば，閉曲線 C を貫く電流が曲面 S のとり方によらずに定まることは，直観的に明らかである．それゆえ定常電流の場合には，アンペールの法則にあいまいさは無い．

上のことをもう少し形式的にいうと次のようになる．閉曲線 C を縁とする曲面として，図 4.14 に示すような二つの面 S_1, S_2 を考え，S_1 と S_2 をいっしょにしてできる閉曲面を S とする．面 S_1 と S_2 を通る電流が等しいという要求は，閉曲面 S から外へ出る全電流がゼロであることと同等である．すなわち

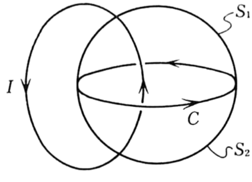


図 4.14　閉曲線 C と絡む電流 I

$$\int_S j_n dS = 0 \tag{4.39}$$

ここで閉曲面 S の法線は外向きにとってある．一方 § 2.1 で学んだように，電荷の保存則は

$$\int_S j_n dS = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{4.40}$$

と表される．いつもの通り，S は任意の閉曲面，V はその内部の領域である．定常電流の場合には電荷密度 ρ は時間的に一定であるから（4.39）が成り立ち，したがって C を貫く電流は一意的に定まることになる．

ところが時間と共に変化する電流まで考えると，電流回路は閉回路とは限らなくなる．例えば図 4.15 のようにコンデンサーに帯電した電荷を放電させる場合には，電流は一方の極板から始まり他方の極板に終わる．いま点 P における磁場を求めるため，閉曲線 C に対してアンペールの法則（4.38）を適用しようとしても，C を貫く電流は C を縁とする面のとり方によって変わり，一意的には定まらない．したがって C に沿う磁場の循環が（4.38）から定まらないことになる．電荷の保存則を用いていえば，図 4.15 の曲面 S_1 と S_2 からできる閉曲面 S の内部の電荷は時間と共に変わるので，（4.40）の右辺は消えず，したがって（4.39）が成り立たないのである．

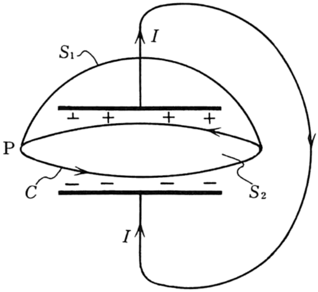


図 4.15 開いた電流回路と閉曲線 C の絡みは定義できない

そこでマックスウェルに従い，非定常な場合にも成り立つように，アンペールの法則を修正することを試みよう．非定常な場合には（4.38）の右辺の電流密度 $\boldsymbol{j}$ に未知の量 $\boldsymbol{X}$ がつけ加わると仮定し，和

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{X} \tag{4.41}$$

に対して（4.39）に当たる式

$$\int_S J_n dS=0 \tag{4.42}$$

が常に成り立つようにできれば，アンペールの法則の矛盾はなくなる．$\boldsymbol{X}$ として何をとればよいかというヒントは，電荷の保存則（4.40）が与えてくれる．場が時間変化する場合にもガウスの法則（4.35）はそのまま成り立つと仮定す

れば，(4.40) の右辺の積分は

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \frac{d}{dt}\int_S \varepsilon_0 E_n dS = \int_S \varepsilon_0 \frac{\partial E_n}{\partial t} dS$$

と変形できるので，(4.40) は

$$\int_S \left(j_n + \varepsilon_0 \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) dS = 0 \tag{4.43}$$

と表せる．したがって

$$\boldsymbol{X} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4.44}$$

ととり，アンペールの法則 (4.38) を

$$\oint_C B_l dl = \mu_0 \int_S \left(j_n + \varepsilon_0 \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) dS \tag{4.45}$$

と改めれば，時間変化がある場合にも矛盾を含まない法則となる．((4.43) の S は任意の閉曲面，それに対し (4.45) の S は C を周とする任意の曲面であるから，混同しないこと.)

上の議論の要点をふりかえると，電流 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ 自身は一般に閉じた流れではないが，それに (4.44) の $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}, t)$ をつけ加えて“一般化した電流” $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$ をつくれば，それは常に閉じた流れになるというわけである．付加項 $\varepsilon_0 \partial \boldsymbol{E}/\partial t$ を，**変位電流** (displacement current) と呼ぶ．しかしこれは真の意味の電流ではないので，誤解のないようにしてほしい．

図 4.15 の例でいえば，コンデンサーの極板間隔が十分に小さければ，電場 $\boldsymbol{E}$ は極板の間の領域にだけあるので，変位電流もこの領域にだけ流れる．図では $\boldsymbol{E}$ は下向きで時間と共に減少するので，$\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ は上向きである．真の電流と変位電流とで閉じた回路ができることが納得できるであろう．

上の議論を微分形の法則を用いてくり返してみよう．アンペールの法則 (4.38′) の両辺の発散をとると

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{j}$$

となる．この式の左辺は § 3.6 で説明したように，位置 $\boldsymbol{r}$ の一価関数 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ に対しては恒等的にゼロになる．一方，右辺は，電荷の保存則

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4.40′}$$

からわかるように，定常電流の場合はゼロであるが一般には消えない．これがアンペールの法則の矛盾である．(4.40′) はガウスの法則 (4.35′) により

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

と書けるので，(4.38′) を

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \tag{4.45′}$$

と修正すれば，今度は右辺の発散も常に消え，無矛盾の式となる．

マックスウェルの方程式　以上でアンペールの法則 (4.38) の修正ができた．電場と磁場のガウスの法則 (4.35)，(4.37) については，それを変更する必然的な理由がないので，時間変化する場に対してもそのままの形で成り立つと仮定する．すなわち，この節のはじめにあげた四つの式は，アンペールの法則に変位電流の項をつけ加えさえすれば，時間的に変化する一般の電場，磁場に対する基礎法則になると仮定する．この四つの式を**マックスウェルの方程式**という．

マックスウェルの方程式は電磁気学の最も基礎的な式であるから，改めてここで列挙しておこう．

積分形：

$$\left.\begin{array}{llll}(\mathrm{a}) & \varepsilon_0\int_S E_n dS=\int_V \rho dV & (\mathrm{b}) & \oint_C E_l dl=-\int_S\frac{\partial B_n}{\partial t}dS \\ (\mathrm{c}) & \int_S B_n dS=0 & (\mathrm{d}) & \oint_C B_l dl=\mu_0\int_S\left(j_n+\varepsilon_0\frac{\partial E_n}{\partial t}\right)dS\end{array}\right\} \tag{4.46}$$

左の二つの式では S は任意の閉曲面，V はその内部の領域であり，右の二つの式では C は任意の閉曲線，S は C が張る任意の曲面である．

微分形：

$$\left.\begin{array}{llll}(\mathrm{a}) & \varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho & (\mathrm{b}) & \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ (\mathrm{c}) & \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 & (\mathrm{d}) & \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\end{array}\right\} \tag{4.46′}$$

マックスウェルが上の結果を得たのは 1860 年頃で，彼はこの方程式の解の中に，電場と磁場が波の形で伝わるものを見出し，電磁波の存在を予言した．§4.6 で説明するように，真空中を伝わる電磁波は速度 $v=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ を持つ．ところが $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ の数値は光速に一致することが知られていたので，これから逆にマックスウェルは，光は電磁波にほかならないという仮説を提唱し，こ

の仮説が光について知られている多くの事実を矛盾なく説明できることを示した．マックスウェルの死後 1887 年に，ヘルツ（Hertz）が電磁波の存在自身を実証し，電磁気学の基礎法則としてのマックスウェル方程式の地位は不動のものとなった．

§ 4.4 準定常電磁場

前節で我々が到達したマックスウェルの方程式は電磁気学の基礎法則であり，すべての電気磁気現象は，この四つの式とローレンツの力（3.6）に基づいて起こる．

マックスウェルの方程式は電場と磁場に対する連立方程式であるが，特に電場・磁場が時間に依存しない場合には，電場だけを含む二つの式と，磁場だけを含む二つの式に分離する．すなわち電場と磁場は独立になる．§1.4 と §3.4 ですでに学んだように，前の二つの式を満たす場がクーロンの電場であり，後の二つの式を満たす場がビオ・サバールの磁場である．すなわち静電場と静磁場の法則は，マックスウェル方程式の中に特殊な場合として含まれている．

では，電荷密度 ρ や電流密度 $\boldsymbol{j}$ に少しでも時間変化があれば，電場や磁場はクーロンの電場やビオ・サバールの磁場とは別のものになってしまい，我々は常にマックスウェル方程式に立ち戻って電場・磁場を求めなければならないのだろうか．

直観的にはそれは不自然に思われる．ρ や $\boldsymbol{j}$ の時間変化がゆっくりしたものであれば，クーロンの法則やビオ・サバールの法則は，少くとも近似的な意味は持つはずである．この辺の事情を明らかにするのが，本節の目的である．

まず，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ を下のように二つの部分に分ける：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}^{i}(\boldsymbol{r},t) \tag{4.47}$$

ここで $\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r},t)$ は，次の二つの式を満たす場として定義する：

$$\varepsilon_0\int_S E_n{}^{\mathrm{C}}dS=\int_V \rho dV \tag{4.48 a}$$

$$\oint_C E_l{}^{\mathrm{C}}dl=0 \tag{4.48 b}$$

この二式は静電場に対する基礎方程式と同じ形を持つので，その解 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r},t)$ はクーロン電場である．ただし今は電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ が時間変化しているから，

$\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r},t)$ は各瞬間ごとの電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ から定まるクーロン電場，すなわち**瞬間的クーロン電場**である．具体的に書けばこれは

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}dV' \quad , \quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}' \tag{4.49}$$

と表される．

(4.47) を (4.46) の (a), (b) に代入し，$\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r},t)$ が (4.48) を満たすことに注意すれば，$\boldsymbol{E}^{t}(\boldsymbol{r},t)$ が満たすべき式

$$\int_S E_n{}^t dS=0 \tag{4.50 a}$$

$$\oint_C E_l{}^t dl=-\int_S\frac{\partial B_n}{\partial t}dS \tag{4.50 b}$$

が得られる．したがって $\boldsymbol{E}^{t}(\boldsymbol{r},t)$ は，§ 4.1 で考察した**誘導電場**である．

マックスウェル方程式の残りの部分は，(4.47) を代入すれば

$$\int_S B_n dS=0 \tag{4.51 a}$$

$$\oint_C B_l dl=\mu_0\int_S\left(j_n+\varepsilon_0\frac{\partial E_n{}^{\mathrm{C}}}{\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial E_n{}^t}{\partial t}\right)dS \tag{4.51 b}$$

と書ける．$\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r},t)$ はすでに求められているので，(4.50) と (4.51) は，$\boldsymbol{E}^{t}(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ に対する連立方程式とみることができる．

ここまではマックスウェル方程式を単に書き換えただけであるが，ここで近似を行う．すなわち，(4.51 b) の右辺の変位電流の中で，誘導電場 $\boldsymbol{E}^t$ の寄与を無視する．その結果 (4.51 b) は

$$\oint_C B_l dl=\mu_0\int_S\left(j_n+\varepsilon_0\frac{\partial E_n{}^{\mathrm{C}}}{\partial t}\right)dS \tag{4.51 c}$$

となる．この近似の意味を次に説明しよう．

$\rho(\boldsymbol{r},t)$ や $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ の時間変化として応用上重要なのは，ある角振動数 ω の調和振動，すなわち $\cos\omega t$，$\sin\omega t$ の形のものである．(任意の形の時間変化はフーリエ級数やフーリエ積分により，異なる角振動数の調和振動の重ね合わせとして表せるから，調和振動だけを考えても一般性は失われない．) その場合には電場や磁場も $\cos\omega t$，$\sin\omega t$ の形で時間変化する．したがって (4.50 b) から E^t は ω に比例し，その時間微分 $\partial E^t/\partial t$ は ω^2 に比例する．時間変化がゆっくりで ω が小さければ，(4.51 b) の中で ω^2 に比例する項は無視できるであろう．

これをもう少していねいに次元解析で調べてみよう．我々が問題にする系の典型的な長さを L とおくと，(4.51 b) より $B \sim L\mu_0 j$ と評価できる．したがって (4.50 b) より $E^t \sim \omega L^2 \mu_0 j$ となり，誘導電場の変位電流は

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E^t}{\partial t} \sim \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 L^2 j = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 L^2 j$$

程度の大きさを持つ．(ここで $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ を用いた．) § 4.6 で説明するように電磁波は光速 c で進むので，角振動数 ω の電磁波を考えるとその波長は

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

である．これを用いれば上の関係は

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E^t}{\partial t} \sim \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 j$$

と表すこともできる．それゆえ (4.51 b) において，誘導電場の変位電流 $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}^t}{\partial t}$ が伝導電流 $\boldsymbol{j}$ と同程度の大きさを持つのは $\lambda \sim L$ の場合ということになる．例えば $L \sim 10\,\mathrm{m}$ とすれば，$\lambda \sim L$ に対応する振動数は $10^7\,\mathrm{Hz}$ 程度であるから，それよりはるかに小さい振動数の振動を問題にする限り，この変位電流は伝導電流にくらべ安心して無視できる．

それならば (4.51 b) で，クーロン電場による変位電流 $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}}{\partial t}$ も無視できるのではないか，という疑問が当然生じるであろう．(現実の問題では，クーロン電場 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}$ と誘導電場 $\boldsymbol{E}^t$ が同程度の大きさを持つ場合も多い．) しかしマックスウェルが変位電流を導入したのは，閉じてない電流分布の場合にアンペールの法則が持つ矛盾を解決するためであった．だから変位電流を全部落とすと，またこの矛盾が復活してしまう．それに対し，クーロン電場による変位電流 $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}}{\partial t}$ だけ残しておけばその問題はない．すなわち，前節の議論をふり返ってみればすぐわかるように，(4.51 c) は内部矛盾を持たない．基礎にとる方程式が内部矛盾を持つのでは困るから，クーロン電場の変位電流だけは残しておこうというのである．(4.51 b) から (4.51 c) へ移る近似，すなわち誘導電場の変位電流を無視する近似を，**準定常の近似**という．

この近似の効果は大きい．すなわち，電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$，電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ が与えられれば，(4.50)，(4.51) を満たす $\boldsymbol{E}^t(\boldsymbol{r}, t)$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ は直ちに求まってしまう．(4.51 c) の右辺に現れる

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\equiv\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{4.52}$$

は，$\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}$ が (4.49) で求められているので，既知の量である．(4.51a) と (4.51c) は，“電流密度” $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ の電流がつくる磁場の基礎法則にほかならず(§3.4 の (3.37), (3.41) を見よ)，したがってこれを満たす磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ は，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ からビオ・サバールの法則により

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t)\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}dV' \qquad (\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{4.53}$$

と求められる．

実は下で示すように，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ の中の変位電流 $\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}}{\partial t}$ は上の積分に寄与しないので，上式の $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t)$ は伝導電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)$ でおきかえられる：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}dV' \tag{4.54}$$

すなわち $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ は，各瞬間の電流分布 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ から定まる**瞬間的ビオ・サバール磁場**である．

積分 (4.53) にクーロン電場の変位電流 $\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}}{\partial t}$ が寄与しないことは，次のようにして示せる．クーロン電場 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}$ は点電荷がつくる電場の重ね合わせであるから，点電荷によるクーロン電場に対してこのことを示せば十分である．原点を点電荷の位置にとれば，点電荷 $q(t)$ が点 $\boldsymbol{r}'$ につくるクーロン電場は

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r}',t)=\frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}$$

であるから，これがつくる変位電流

$$\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}}{\partial t}=\frac{\dot{q}}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3} \tag{4.55}$$

を (4.53) の $\boldsymbol{J}$ に代入すると，積分は

$$\int\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{R}}{r'^3R^3}dV'=\int\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}}{r'^3R^3}dV'$$

の形になる．図 4.16 に示すように，ベクトル $\boldsymbol{r}$ を軸とする円 C の上で r' および R は一定であるから，$\boldsymbol{r}$ を軸とする角度積分によって $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}$ が打ち消し合い，積分は消える．要するに，点電荷による変位電流 (4.55) は一点から球対称に等方的にでる電流分布であって特定の軸を持たないから，ビオ・サバールの磁場をつくれないのである．

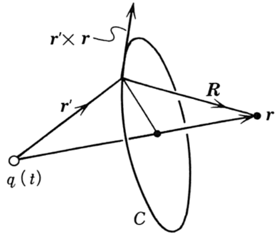


図 4.16　点 $\boldsymbol{r}'$ のクーロン電場の変位電流が点 $\boldsymbol{r}$ につくる磁場は，$\boldsymbol{r}$ を軸とする円 C の上で $\boldsymbol{r}'$ を動かせば相殺する

【例 1】　半無限の直線電流がつくる磁場　z 軸上を負の方向から原点 O に向かって

電流 I が流れ，電荷は O にたまっていくとする．原点 O の電荷 $q(t)$ は等方的なクーロン電場 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r},t)$ をつくるので，O からは変位電流

$$\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}}{\partial t}=\frac{\dot{q}}{4\pi}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

が等方的に流れ出す．$\dot{q}=I$ の関係があるので，変位電流の総量は O に向かう電流 I に等しい．すなわち電流 I と変位電流とで，閉じた流れができる．このときにできる磁場を（i）ビオ・サバールの法則（ii）アンペールの法則の二通りの方法で求めよう．この例題はアンテナを単純化したモデルであるが，変位電流の役割を理解するのには役立つであろう．

（i） ビオ・サバールの法則　　磁場は明らかに z 軸に関し軸対称で，渦状の磁力線をつくる．場を求める点 P の位置を，z 軸からの距離 ρ と図 4.17 に示す角 θ で表す．半無限の直線電流の磁場のビオ・サバールの法則による計算は，§ 3.2 の無限に長い直線電流の磁場の場合と同様にできるので，説明は略して式だけを示す．図 4.17 の記号を用いれば，

$$B(\rho,\theta)=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\theta'}{R^2}dz=\frac{\mu_0}{4\pi\rho}I\int_0^{\theta}\sin\theta'\,d\theta'$$
$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}(1-\cos\theta)$$

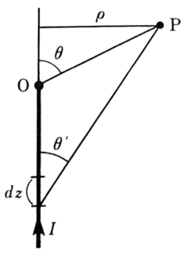


図 4.17 半無限の直線電流がつくる磁場（ビオ・サバールの法則）

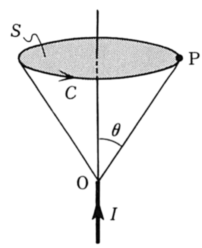


図 4.18 半無限の直線電流がつくる磁場（アンペールの法則）

（ii） アンペールの法則　　点 P を通る磁力線を C とし，C を周とする円を S とする．$\theta\leqq\pi/2$ のときは S を貫く電流はないので，変位電流だけ考えればよい．面 S が原点 O に対して張る立体角を Ω とすれば，S を貫く変位電流は $I\Omega/4\pi$ である．したがってアンペールの法則 (4.51 c) を C について書けば

$$2\pi\rho B(\rho,\theta)=\mu_0 I\frac{\Omega}{4\pi}$$

となる．ここで $\Omega=2\pi(1-\cos\theta)$ を用いれば，直ちに上と同じ磁場が得られる．

興味のある読者は，$\theta\geqq\pi/2$ の場合を試みてほしい．

この例からわかるように，準定常の近似があいまいさのない結果を与えるためには，クーロン電場 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}$ の変位電流を（4.51c）に残しておくことが原理的には必要である．しかし現実の問題で上例のように $\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}$ の変位電流が重要な役割を持つことはきわめて稀であり，また磁場は常にビオ・サバールの法則（4.54）で求めることにすればそれには $\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}$ の変位電流は寄与しないのであるから，準定常の近似をするとき，始めから $\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}$ の項まで含めて変位電流を全部（4.51b）から落してしまうことが多い．

電　位　準定常な電磁場の代表的な例は，§4.1 で考えた誘導電場や，次節で扱う交流回路に伴う電場・磁場である．ところで電位という概念は，本来は静電場に対して定義されたものである．電位が空間の点の一価関数になるのは，任意の閉曲線 C に対して

$$\oint_C E_l dl = 0$$

という条件が満たされるときだけであるが，時間変化があるときに電場が満たす式は（4.46b）であるから，一価関数としての電位は存在しなくなる．しかし電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ をクーロン電場 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r},t)$ と誘導電場 $\boldsymbol{E}^{i}(\boldsymbol{r},t)$ に分けると，前者は再び上の条件を満たすので，$\boldsymbol{E}^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{r},t)$ に対する電位 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ は定義できる．

交流回路の場合には誘導電場が現れるのはコイルの中などの限られた場所で，それ以外の所では電場はクーロン電場である．そのため交流回路でも，電位や電圧（＝電位差）の概念を直流の場合と同様に用いることができる．ある道 C に沿う電場の線積分 $\int_C E_l dl$ は，誘導電場が存在する領域を C が通らなければ，C の両端の点の電位差に等しい．

しかし例えば渦電流を扱う場合や，マイクロ波のように振動数の高い電磁場の回路を扱う場合には，誘導電場がいたる所に現れるため，電場をクーロン電場と誘導電場に分けて考えることの実用的な意味はなくなり，電位の概念も意義を失う．このような場合には，上に述べた電場の線積分は，道 C の両端の点だけでなく C のとり方にも依存することに注意する必要がある．

§4.5　交　流

複素数による表示　交流の起電力は，時間の原点を適当にとれば

$$\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0\cos\omega t \qquad (4.56)$$

の形に表される．振動数（周波数）$\nu=\omega/2\pi$ の単位は s^{-1} であるが，これをヘルツ（Hz）と呼ぶ．$\mathcal{E}(t)$ の時間平均はもちろんゼロであるが，$\mathcal{E}(t)$ の二乗の時間平均は

$$\langle\mathcal{E}^2\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\mathcal{E}(t)^2dt=\frac{1}{2}\mathcal{E}_0{}^2$$

となる（$T=1/\nu$ は周期）．その平方根 $\sqrt{\langle\mathcal{E}^2\rangle}=\mathcal{E}_0/\sqrt{2}$ を，起電力 $\mathcal{E}(t)$ の**実効値**（effective value）と呼ぶ．実用上は起電力の強さを実効値で表す．

ある交流回路に（4.56）の起電力がかかるとき，その回路を流れる電流は，後で説明するように

$$I(t)=|I_0|\cos(\omega t+\delta) \qquad (4.57)$$

の形を持つ．（絶対値の記号 $|I_0|$ を用いた理由はすぐにわかる．）すなわち $I(t)$ と $\mathcal{E}(t)$ の間には位相のずれ δ があり，そのためにいろいろな計算が面倒になる．このわずらわしさを避けるために，次のような工夫がなされている．

いま，同じ回路に起電力

$$\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0\sin\omega t$$

をかけたとする．これは（4.56）で時間の原点を $\pi/2\omega$ ずらしたものと見ることができるから，そのとき流れる電流は

$$I(t)=|I_0|\sin(\omega t+\delta)$$

である．一般に

$$\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0(a\cos\omega t+b\sin\omega t)$$

の形の起電力をかければ，重ね合わせの原理により，電流は

$$I(t)=|I_0|(a\cos(\omega t+\delta)+b\sin(\omega t+\delta))$$

となる．ここで $a=1$，$b=i$ とおき，仮想的な起電力

$$\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0(\cos\omega t+i\sin\omega t) \qquad (4.58)$$

を考えてみる．もちろん現実には複素数の起電力は存在しないが，式の上で考えるのは自由である．そのときの電流は，

$$I(t)=|I_0|(\cos(\omega t+\delta)+i\sin(\omega t+\delta)) \qquad (4.59)$$

となる．オイラーの公式（4.27）を用いれば，起電力（4.58）は

$$\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0e^{i\omega t} \qquad (4.60)$$

と表され，電流（4.59）は

$$I(t)=|I_0|e^{i(\omega t+\delta)}$$

と表される．ここで複素数の振幅 I_0 を

$$I_0=|I_0|e^{i\delta} \tag{4.61}$$

で定義すれば，電流の表式は

$$I(t)=I_0e^{i\omega t} \tag{4.62}$$

となる．このように，複素数の起電力（4.60）に対しては，電流も起電力と同じ時間依存性をもつので，いろいろな式が簡単になる．ただし，振幅 I_0 は（4.61）が示すように複素数で，その中に本来の振幅 $|I_0|$ と位相のずれ δ の両方の情報が含まれる．現実の起電力（4.56），電流（4.57）に戻るには，（4.60），（4.62）の実数部分をとればよい．

***LCR* 回路** §4.2 で考察した LCR 回路に，交流起電力 $\mathcal{E}(t)$ を加えてみよう（図 4.19）．この回路全体の起電力は $\mathcal{E}-LdI/dt$ であるから，オームの法則は

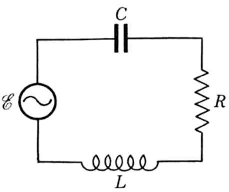


図 4.19 LCR 交流回路

$$\frac{Q}{C}+RI=\mathcal{E}-L\frac{dI}{dt}$$

となる．実用上よく使われる電圧（voltage）という言葉は電位差と同義語であるが，同時に起電力という感じでも用いられる．その意味は上式から明らかであろう．この式を

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}Q=\mathcal{E} \tag{4.63}$$

あるいは $I=dQ/dt$ を用いて

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=\mathcal{E} \tag{4.63$'$}$$

と書き換えておく．

（4.63′）は非同次の線形微分方程式であるから，§4.2 でも述べたように，その一般解は，同次方程式の一般解と元の方程式の特解の和で与えられる．前者は §4.2 で学んだ減衰振動にほかならない．ここでは後者について調べよう．

交流起電力 $\mathcal{E}(t)$ として複素数の形（4.60）をとれば，（4.63）は

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}Q=\mathcal{E}_0e^{i\omega t} \tag{4.64}$$

となる．この方程式の特解の中に，$I(t), Q(t)$ が $\mathcal{E}(t)$ と同様に $e^{i\omega t}$ の形で

時間変化するものがあると仮定し，

$$I(t)=I_0e^{i\omega t} \quad , \quad Q(t)=\frac{1}{i\omega}I_0e^{i\omega t} \tag{4.65}$$

とおく．これを（4.64）に代入すれば

$$\left(i\omega L+R+\frac{1}{i\omega C}\right)I_0e^{i\omega t}=\mathcal{E}_0e^{i\omega t}$$

となるので，振幅 I_0 が

$$I_0=\frac{\mathcal{E}_0}{Z} \quad , \quad Z\equiv R+i\omega L+\frac{1}{i\omega C} \tag{4.66}$$

であれば，確かに（4.65）が（4.64）の解となる．一般に起電力（4.60）を加えたとき回路に電流（4.65）が流れるならば，比 $Z=\mathcal{E}_0/I_0$ をその回路の**インピーダンス**（impedance）と呼ぶ．インピーダンスは直流回路の電気抵抗に当たる量である．（4.66）の Z は今考えている LCR 直列回路のインピーダンスである．前にも述べたように，振幅 I_0 が複素数になるのは，起電力と電流の間に位相のずれがあることを反映している．振幅 I_0 の絶対値 $|I_0|$ と位相 δ は

$$|I_0|=\frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \quad , \quad |Z|=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{4.67}$$

$$\tan\delta=-\frac{1}{R}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right) \tag{4.68}$$

で与えられ，現実の電流は（4.57）の形を持つ．

起電力の角振動数 ω によって電流がどう変わるかを見るには，（4.67）を

$$|I_0|^2=\frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\frac{\mathcal{E}_0{}^2}{R^2}$$

と書き換えるとわかりやすい．ここで ω_0 は § 4.2 で学んだ LC 回路の固有角振動数 $\omega_0=1/\sqrt{LC}$，γ は減衰の大きさを表す定数 $\gamma=R/2L$ である．$|I_0|$ は $\omega=\omega_0$ のとき最大値 $|I_0|_{\max}=\mathcal{E}_0/R$ をとる．図4.20に示すように，$\gamma\ll\omega_0$ の場合には $|I_0|^2$ は $\omega=\omega_0$ で鋭い山を持つ．この現象を**共振**（resonance）と呼ぶ．自由振動の振動数（即ち固有振動数）の所で強制振動が共振をひき起こすことは，物理学のあらゆる分野でみられる共通の現象である．これ

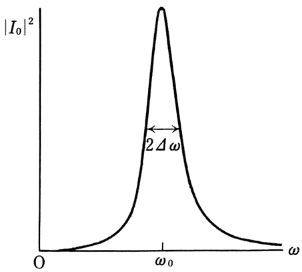


図 4.20　共振曲線

はすべての（微小）振動が同じ形の微分方程式で支配されることの結果である.

はじめに述べたように，(4.63) の一般解は，上で求めた特解と同次方程式の一般解の和である．ところが同次方程式の一般解は減衰振動であるから，どんな初期条件から出発しても短時間のうちに減衰してしまう．したがってスイッチを入れた直後を問題にするような場合を除けば，電流が起電力と同じ振動数で正弦振動をする特解だけを考えればよいのである.

電　力　回路に起電力 (4.56) を加えたとき電流 (4.57) が流れるならば，起電力のする仕事率は

$$P(t)=\mathcal{E}(t)I(t)=\mathcal{E}_0|I_0|\cos\omega t\cos(\omega t+\delta)$$

である．これを

$$P(t)=\mathcal{E}_0|I_0|(\cos\delta\cos^2\omega t-\sin\delta\cos\omega t\sin\omega t)$$

と書いて時間平均をとると，第二項は消えて

$$\langle P\rangle=\frac{1}{2}\mathcal{E}_0|I_0|\cos\delta=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}\frac{|I_0|}{\sqrt{2}}\cos\delta$$

となる．起電力の仕事率の時間平均を**電力**と呼ぶ．上式のように，これは起電力および電流の実効値の積（これを**皮相電力**という）に**力率** $\cos\delta$ をかけたものに等しい．電力の単位はワット (W) である.

インピーダンスは $Z=|Z|e^{-i\delta}$ の位相を持つので，Z の実数部分は $\mathrm{Re}\,Z=|Z|\cos\delta$ と表せる．この関係を用いれば上式は

$$\langle P\rangle=\left|\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right|^2\mathrm{Re}\,Z$$

とも書ける．すなわちインピーダンスの実数部分が直流回路の抵抗に相当する．したがって図 4.20 のグラフは，LCR 回路で消費される電力の ω 依存性を表したものである．共振の状態では起電力と電流の位相差が無いため，消費される電力が最大になる.

§4.6 電　磁　波

マックスウェルの理論の最大の成果は，電磁波の存在を示したことである．電磁波については，このシリーズの別の巻*でくわしく扱われているので，ここでは，マックスウェル方程式から電磁波が導かれる様子を，定性的に示すに

* 岩本文明著『波動』（基礎物理学4）東京大学出版会.

とどめる.

いま，電流が一様に流れている無限に広い導体の板を考える．導体板を yz 平面にとり，電流は z 方向に流れるものとし，電流密度は y 方向の単位長さ当たり J とする．この電流分布は yz 平面の両側に一様な磁場をつくる．§3.4 の例2によれば，磁場 $\boldsymbol{B}$ は y 成分のみを持ち，$x>0$ では $B_y=\mu_0 J/2$, $x<0$ では $B_y=-\mu_0 J/2$ である.

上で考えたのは定常電流がつくる磁場である．では，この電流を時刻 $t=0$ に流し始めるとすれば，どのような場ができるであろうか．$t=0$ に，上記の磁場が無限遠方まで瞬間的にできるのだろうか．ここで考慮に入れなくてはならないのは，$t<0$ では存在しなかった磁場が $t>0$ でできるのだから，それに伴い誘導電場が生じ，さらに誘導電場ができればその変位電流が磁場をつくるということである.

そこでここでは，上記の磁場が存在する領域が，一定速度 v で導体板の両側に広がっていくと仮定し，このような場がマックスウェル方程式から許されるかどうかを見ることにしよう．すなわち時刻 $t>0$ における磁場は

$$B_y(x,t)=\begin{cases} B_0 & 0<x<vt \\ -B_0 & 0>x>-vt \\ 0 & |x|>vt \end{cases} \tag{4.69}$$

と仮定する．ここで $B_0=\mu_0 J/2$ とおいた.

誘導電場のでき方を見るために，図 4.21 に示すように，磁場が存在する領域の先端では，微小な長さ $\varDelta$ の区間で，B_y が $\pm B_0$ から 0 まで直線的に変わると考える．いいかえればこの区間で，時間幅 $\varDelta/v$ の間に B_y が 0 から $\pm B_0$ まで変わるので，この区間の磁場の変化率は $\dot{B}_y=\pm vB_0/\varDelta$ となる．$\varDelta\to 0$ の極限をとれば，平面 $x=\pm vt$ 上で，z 方向の単位長さ当たり $\dot{\varPhi}_y=\pm vB_0$ の磁束変化があることになる．平行な二枚の平面上の電流分布による磁場（§3.4，例3参照）との類推から，上記の磁束変化は $|x|<vt$ の領域に $-z$ 方向の誘導電場をつくることがわかる．すなわち

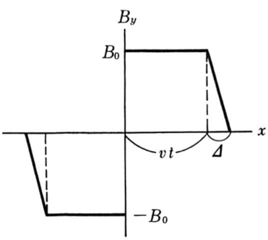


図 4.21　速度 v で広がる磁場

$$E_z(x,t)=\begin{cases}-vB_0 & |x|<vt\\ 0 & |x|>vt\end{cases} \tag{4.70}$$

電場 E_z が存在する領域が速度 v で広がるため，その先端には電流密度 $\varepsilon_0\dot{E}_z$ の変位電流が生じる．上の議論をくりかえせば，平面 $x=\pm vt$ 上に，y 方向の単位長さ当り，変位面電流 $J_D=v^2\varepsilon_0 B_0$ が $-z$ 方向に流れることになる．この二枚の面電流がつくる磁場は，$x>vt$ では $B_y=-\mu_0 J_D$，$x<-vt$ では $B_y=\mu_0 J_D$，$|x|<vt$ では $B_y=0$ である．

そこで，もし $\varepsilon_0\mu_0 v^2=1$，すなわち

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\equiv c \tag{4.71}$$

であれば，上記の変位電流がつくる磁場が，導体板上の面電流がつくるビオ・サバールの磁場のうち領域 $|x|>vt$ の分を完全に打ち消し，結局はじめに仮定した磁場 (4.69) が実現されることがわかる．すなわち，光速 c で広がる磁場 (4.69) と電場 (4.70) はマックスウェル方程式を満たす．このように $t=0$ に電流が流れはじめたことの結果は，空間を有限速度 c で伝わるのである．

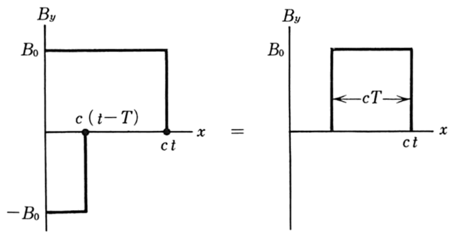


図 4.22 速度 c で動く磁場のかたまり

つぎに，時刻 $t=T$ に導体平面上の電流を止めたとする．場を求めるためには，これまでの電流分布のほかに，同じ強さで反対方向を向く電流分布が，$t=T$ から新たに加わったと見ると考えやすい．この新たな電流分布を源とする磁場・電場は上と同様に求めることができ，それを (4.69)，(4.70) に加えたものが，$t>T$ における場である．すなわち $t>T$ では，電場・磁場共に，区間 $c(t-T)<|x|<ct$ にだけ存在し，この領域が速度 c で導体平面から離れていく．たとえば $x>0$ の部分の場は $c(t-T)<x<ct$ では

$$B_y=B_0 \quad , \quad E_z=-cB_0 \tag{4.72}$$

で，上の区間の外では電場も磁場もゼロである（図 4.22).

こうして電荷・電流の存在しない空間の中を，光速 c で動いていく電場と磁場のかたまりが，マックスウェル方程式の解として得られた．これは電磁波の最も簡単な例である．$t>T$ では電流分布は存在しないので，(4.72) の電磁場の源は，自分自身の時間変化である．すなわち磁場の時間変化 $\dot{B}_y$ により誘導電場 E_z ができ，電場の時間変化 $\dot{E}_z$ から変位電流の法則により磁場 B_y ができる．これが電磁波という形の電場・磁場が存在できる理由である．

〔問〕上に述べたことを (4.72) の電場・磁場について確かめよ．

(4.72) では，電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{B}$，および進行方向がたがいに直交し，この順に右手系をつくる．また $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の大きさには

$$|\boldsymbol{E}|=c|\boldsymbol{B}|$$

の関係がある．この二つのことはすべての電磁波に共通する性質で，マックスウェル方程式の帰結である．

上で求めた (4.72) は，時間 T の間だけ一定の平面電流が流れるときにできる電磁場である．この結果を用いれば，任意の時間変化をする平面電流がつくる電磁場も，容易に求められる．時間を微小間隔 T に分割すれば，一つの時間間隔 T の間では平面電流は一定値を持つとみることができるから，すべての時間間隔の電流が，それぞれ (4.72) の形の電磁場をつくると考えればよい．したがって，時刻 t における位置 x の電磁場は，時刻 $t-x/c$ における平面電流によってつくられる．

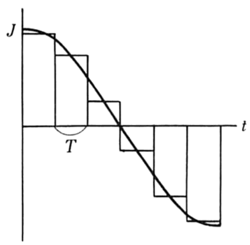


図 4.23 時間変化する電流は時間間隔 T の間一定の電流の集まりとみなせる

このように考えれば，yz 平面上に z 方向を向く（y 方向の単位長さ当たり）

$$J(t)=J_0\cos\omega t$$

の振動電流があるとき，$x>0$ における電磁場は

$$B_y(x,t)=B_0\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

$$E_z(x,t)=-cB_y(x,t)$$

で与えられることがわかる ($B_0=\mu_0J_0/2$)．すなわち角振動数 ω の平面電流は，

同じ角振動数の正弦波の電磁波を両側に送り出す．この電磁波の波面は x＝一定の平面であるから，**平面波**と呼ばれる．

ここで考えた平面上の電流分布は，一方向にだけ電磁波を出すのに用いられるビーム・アンテナのモデルと見ることができる．それに対しふつうのアンテナは長さが半波長程度の導体棒であるが，その上の振動電流がつくる電磁波を求めるには，偏微分方程式（4.46′）をとくことが必要になる．

電磁波では，電荷・電流がつくる電場と磁場が，有限の速度で空間を伝わり，それと共にエネルギーも空間を伝わる．したがって電場・磁場は，単に電荷や電流の間の力を記述するための補助的な概念ではなく，ふつうの物質と同じ資格を持つ物理的な実体とみなされねばならない．場を実体としてとらえることが，ファラデイ，マックスウェルの電磁気学の最大の特長である．

問　　題

4.1　時間変化する磁束 $\Phi_0 \cos \omega t$（$\Phi_0 = 1\,\mathrm{Wb}$, $\nu = \omega/2\pi = 50\,\mathrm{Hz}$）が回路を貫くとき，回路に生じる誘導起電力の最大値はどれだけか．

4.2　500 ガウスの磁場の中で，面積 $1\,\mathrm{cm}^2$，巻数 1000 のコイルを磁場と垂直な回転軸のまわりで毎秒 10 回転させる．コイルに発生する誘導起電力の実効値を求めよ．

4.3　z 方向を向く一様な磁場 B の中に，長さ l の細い導体棒を y 方向に向けて置く．これを速度 v で x 方向に動かすとき，棒の両端に現れる電位差はどれだけか．

4.4　垂直方向の一様な磁場 B の中に間隔 a の二本のレールを水平に置き，その一端を抵抗 R により結ぶ（図 4.24）．このレールにまたがった導体片が摩擦無しで滑ることができる．導体片およびレールの抵抗は R に比べ無視できるものとする．いま導体片を一定の力 f で引っ張り，導体片が等速運動をしている状態を考える．この“発電機”に発生する起電力 $\mathcal{E}$ および導体片の速度 v は R にどう依存するか．

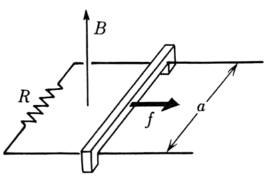


図 4.24

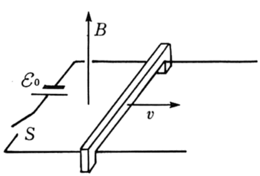


図 4.25

4.5 前問の抵抗 R を取り去り起電力 $\mathcal{E}_0$ の電池を代わりに入れる（図 4.25）.

（イ） 時刻 $t=0$ にスイッチを入れると導体片が動き始めた．この“電動機”に流れる電流 $I(t)$ および導体片の速度 $v(t)$ を求めよ．ただし導体片の質量を M, 抵抗を r とし，レールの抵抗は r に比べ無視できるものとする.

（ロ） 導体片に速度に比例する摩擦力 $-\Gamma v$ が働く場合には，$I(t)$ および $v(t)$ はどうなるか.

4.6 図 4.26 に示す半径 a の円形回路の中心軸（これを x 軸とし，円の中心を原点とする）の上を磁荷 q_m が速度 v で動くとき，回路に生ずる誘導起電力を q_m の位置 x の関数として求めよ.

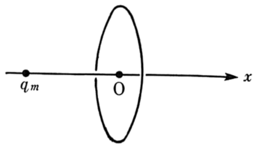


図 4.26

4.7 前問で回路の抵抗を R とする.

（イ） q_m が回路を流れる電流から受ける力を求めよ.

（ロ） q_m を動かすのに要する仕事率と回路で発生するジュール熱の関係を調べよ.

（ハ） q_m が $-\infty$ から $+\infty$ まで一定速度 v で動く間に回路に発生するジュール熱の総量を求めよ.

4.8 超電導体の内部には磁場が入りこむことができない．これをマイスナー(Misner)効果という．例えば磁荷を超電導体の表面に近づけると，表面に誘導電流が流れ，超電導体内部ではこの電流分布がつくる磁場が磁荷による磁場を完全に打ち消す．磁荷 q_m を超電導体の表面から距離 h の点に置くとき，どのような磁場ができるか．q_m はどのような力を受けるか．〔ヒント〕問題 3.19 を参照せよ.

4.9 大地からの高さ h の所に電線を張り電流 I を流す．この電流の帰路は大地を通るとする．大地を抵抗率がゼロの完全導体とみなせば，どのような磁場が空間にできるか.

4.10 断面積が S_1 および $S_2(S_1>S_2)$，単位長さ当たりの巻数が n_1 および n_2 で，同じ長さ l を持つ同軸のソレノイドがある．二つのソレノイドの間の相互インダクタンスが相反性を満たすことを確かめよ．ただし l はソレノイドの半径にくらべ十分に長いものとする.

4.11 （イ） 前問で二つのソレノイドにそれぞれ電流 I_1, I_2 を流すときの電流のエネルギーを，磁場のエネルギー密度から求めよ.

（ロ） 外側の電流 I_1 を δI_1 だけ変え I_2 は一定に保つとき，内側のソレノイドの電源がする仕事はどれだけか．同様に内側の電流 I_2 を δI_2 だけ変えるとき，外側のソレノイドの電源がする仕事はどれだけか.

4.12 インダクタンス L のコイルと抵抗 R から成る図 4.27 の回路の AB 間に図の（b）に示すパルス状の電圧を加えるとき，抵抗 R の両端にはどのような電圧が現れるか．〔ヒント〕微分方程式（4.16）を時間 $0\leqq t\leqq T$ と $T\leqq t$ で別々に解き，両方の解を $t=T$ でつなぐ.

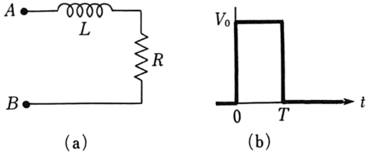


図 4.27

4.13 前問で $L=1\,\mathrm{mH}$, $R=1\,\mathrm{k\Omega}$ のとき，この回路の時定数はどれだけか．

4.14 図 4.28 に示す容量 C のコンデンサーと抵抗 R から成る回路の AB 間に図 4.27(b) のパルス状電圧を加えるとき，コンデンサーの両端にはどのような電圧が現れるか．

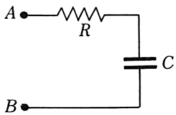


図 4.28

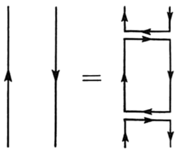


図 4.29

4.15 間隔 b の平行な二本の電線を電流の往復の線路に用いるとき，線路の単位長さ当たりのインダクタンスを求めよ．ただし電線の半径を a とし，電流は一様な電流密度で電線内部を流れるものとする．(平行電流は図 4.29 のように閉回路の集まりとみなせるので，その一部分のインダクタンスということが意味を持つ．)

4.16 次の平行電線のインダクタンスを計算せよ．

(イ) 直径 1 mm, 長さ 5 cm, 間隔 1 cm

(ロ) 直径 4 mm, 長さ 100 m, 間隔 0.5 m

4.17 図 4.30 に示す抵抗とコンデンサーから成るブリッジに交流電圧を加えるとき，検流計 G に電流が流れないためにはどのような条件が成り立てばよいか．〔ヒント〕$V_0e^{i\omega t}$ の形の交流電圧を加えると考えよ．

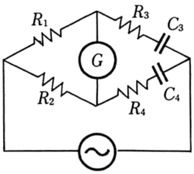


図 4.30

4.18 容量 $1\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーと $1\,\mathrm{k\Omega}$ の抵抗を直列につなぎ，これに振動数 50 Hz, 実効値 100 V の交流電圧を加える．発熱量は何 W か．

4.19 $B(t)=B_0\cos\omega t$ の形で時間変化する一様な磁場の中に，半径 a, 厚さ b の銅の円板を，円板の面を磁場と垂直にして置く．渦電流により発生するジュール熱の時間平均を求めよ．銅の導電率を σ とする．(渦電流がつくる磁場は無視

して考えよ.）

4.20 厚さ $2a$ の導体の板に，板の表面と平行な一様な磁場 $B_0\cos\omega t$ をかける．図4.31に示す板の長さ l が厚さに比べ十分に大きければ，導体中の渦電流の分布は図（b）に示すように（板の両端付近を除けば）いたる所で板の表面に平行で，中心軸（y 軸）に関し対称とみなしてよい．

（イ） y 軸から x 離れた点の電流密度を求めよ．導体の導電率を σ とする．（渦電流がつくる磁場は無視せよ.）

（ロ） 板の単位体積当たりに発生するジュール熱は，a^2 に比例することを示せ．

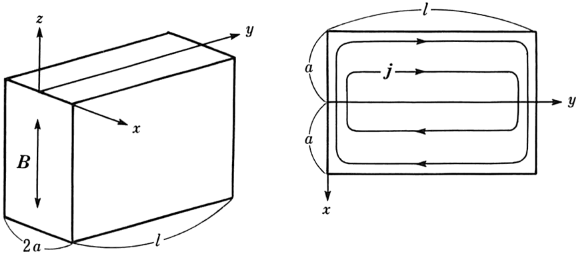


図 4.31

4.21 交流機器の鉄心として，厚さ 0.5 mm の鉄の薄い板を磁場と平行に重ねて用いるとき，$B_0=1\,\mathrm{T}$，$\nu=\omega/2\pi=50\,\mathrm{Hz}$ の磁場 $B_0\cos\omega t$ による渦電流の発熱量は，鉄心 1 kg 当たり何 W か．ただし鉄の比重を 7.9 とし，薄板間は絶縁されているものとする．（抵抗率は表 2.1（p. 46）を参照せよ.）

4.22 渦電流自身がつくる磁場について考察するため，再び問題 4.20 を考える．

（イ） そこで求めた電流密度を $j_0(x,t)$ とする．電流分布 $j_0(x,t)$ がつくる磁場 $B_1(x,t)$ を求めよ．〔ヒント〕$j_0(x,t)$ は § 3.4 例 3 の平行平面上の電流分布の集まりとみなせる．

（ロ） 上の $B_1(x,t)$ により生ずる電流分布 $j_1(x,t)$ を問題 4.20 と同様にして求め，さらに $j_1(x,t)$ がつくる磁場 $B_2(x,t)$ を求め，……という逐次近似を行えば，導体中の磁場 $B(x,t)$ および電流密度 $j(x,t)$ は $B=B_0+B_1+\cdots$，$j=j_0+j_1+\cdots$ として得られる．しかしむしろ，$B(x,t)$ が満たす微分方程式を解く方が賢明である．導体中の z 向きの磁場 $B(x,t)$ と y 向きの電場 $E(x,t)$ が満たすマックスウェル方程式から，$B(x,t)$ に対する微分方程式を導け．ただしすべての量は $e^{i\omega t}$ の形で時間変化するものとし，また変位電流は無視せよ．

（ハ） 上の微分方程式を解いて，導体中の磁場が

$$B(x,t)=\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{e^{\alpha a}+e^{-\alpha a}}B_0e^{i\omega t}$$

と表せることを示せ．ここで $B_0e^{i\omega t}$ は導体板に外部から加えた磁場で，また

$\alpha \equiv (1+i)/\delta$, $\delta \equiv \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ である.（δ は導体の表皮の厚さ（skin depth）と呼ばれる.）

（ニ） $a \ll \delta$ の場合には上の $B(x,t)$ は（イ）の結果と一致することを示せ.

（ホ） $a \gg \delta$ の場合には,（ハ）の $B(x,t)$ は

$$B(x,t) \approx B_0 e^{-(a-|x|)/\delta} \exp\left[i\left(\omega t - \frac{a-|x|}{\delta}\right)\right]$$

と表せることを示せ. この表式は磁場が導体表面から δ 程度の範囲までしか入りこまないことを示している.

（ヘ） 振動数 50Hz および 1MHz の場合の銅の表皮の厚さを求めよ.（抵抗率は表 2.1 (p. 46) を参照せよ.）

第5章　物質中の電磁場

これまでは，空間に電荷・電流が分布しているときにできる電場・磁場を主に問題にしてきた．本章では，固体・液体・気体などの物質の内外の電場・磁場について学ぶ．物質は原子核と電子から構成されているが，電磁気学の立場から見れば，これは電荷・電流の集まりとみなせる．それゆえ本章の内容は，本質的には，前章までに学んだことの応用である．しかし物質内部の電荷・電流の分布はその場所の電場・磁場により定まり，その電荷・電流の分布自身が電場・磁場の源になるという入りくんだ事情のために，物質中の電磁場には独自の取り扱いが必要となるのである．

§5.1　誘　電　体

前にも述べたように，電気的な観点から見るとき，物質は導体と絶縁体に大別される．導体については第1章，第2章で考察したので，ここでは絶縁体をとり上げる．絶縁体は**誘電体** (dielectric) とも呼ばれる．

誘 電 率　誘電体の研究はファラデイに始まる．彼は，コンデンサーの極板の間に誘電体をさしこむと，コンデンサーの電気容量が増加することを発見した．極板間の空間が真空のときの電気容量を C_0 とし，極板の間に誘電体を隙間なくつめたときの電気容量を C とすると，倍率 $C/C_0 \equiv \kappa$ はコンデンサーの形には

表 5.1　相対誘電率

気体（20℃　1気圧）	
H_2	1.000254
O_2	1.000498
N_2	1.000548
CO_2	1.000922
液体（25℃）	
H_2O	78.54
NH_3	16.9
HCl	4.6
ベンゼン	2.274
エタノール	24.30
アセトン	20.7
固体（室温）	
NaCl	5.9
C（ダイアモンド）	5.5
雲母	5〜9
ガラス	5〜10
水　晶	3.5〜4.7
チタン磁器	30〜90
ポリエチレン	2.25〜2.35
チタン酸バリウム	〜5000（a 軸向）
	〜160　（c 軸向）

よらず誘電体の種類によって定まる物質定数である．κ を**相対誘電率**または**比誘電率**と呼ぶが，単に誘電率（dielectric constant）ということも多い．表5.1 に，いくつかの物質の相対誘電率を示す．（相対誘電率の値は，一般に温度によって変化する．）

〖注意〗 極板間に誘電体をさしこんだ場合にも，極板上の電荷 $\pm Q$ と極板間の電位差 V の間に比例関係 $Q=CV$ が成り立つことは自明ではないが，ファラデイの実験はそれを確かめたのである．

分　極　例として平行板コンデンサーをとり，極板上の電荷を一定に保ちながら，誘電体を極板間にさしこんでみよう．電荷が一定であるから，電気容量が κ 倍になることは，極板間の電位差が $1/\kappa$ に減少することにほかならない．電位差は極板間で電場を線積分したものであるから，電位差の減少は電場の減少を意味する．

極板上の電荷面密度を $\pm\sigma_0$ とすれば，この電荷分布が極板間につくる電場は

$$E_0=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \tag{5.1}$$

である．誘電体の挿入によって電場が減少することを説明するには，誘電体中に電荷分布が現れ，それがつくる電場が上の E_0 を部分的に打ち消すとみればよかろう．最も簡単な仮定として，誘電体の表面に，極板上の電荷と反対符号の電荷分布ができると考えてみる．誘電体表面に現れる電荷の面密度を $\mp\sigma_P$ とすれば(図 5.1)，これを誘電体内部から見れば極板上の電荷面密度が $\pm(\sigma_0-\sigma_P)$ に変化したことと同等であるから，誘電体中には電場

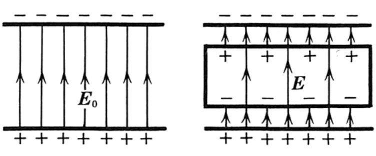


図 5.1　(a)コンデンサーの極板上の電荷による電場 $\boldsymbol{E}_0$．(b)誘電体中の電場 $\boldsymbol{E}$

$$E=\frac{\sigma_0-\sigma_P}{\varepsilon_0} \tag{5.2}$$

ができる．電位差が $1/\kappa$ になるためには，この電場が

$$E=\frac{1}{\kappa}E_0 \tag{5.3}$$

となる必要があり，それには誘電体表面の電荷面密度が

$$\sigma_P = (\kappa - 1)\varepsilon_0 E \tag{5.4}$$

であればよい．誘電体表面に現れる電荷を**分極電荷**（polarization charge）と呼ぶ．

ここで，分極電荷が現れる理由を，モデルによって考えてみよう．簡単のため，この誘電体が一種類の原子からできていると仮定する．原子は原子核とそのまわりの電子雲から成り，ふつうの状態では，電子雲の重心は原子核の位置と一致している．ところが電場 $\boldsymbol{E}$ の中では，原子核は電場から $\boldsymbol{E}$ の方向に力を受け，電子雲は $\boldsymbol{E}$ と逆方向に力を受けるので，電子雲の重心と原子核の位置にずれが生ずる（図 5.2）．原子核の電荷を q とすれば電子雲の全電荷は $-q$ であるから，このずれによって原子は電気双極子となる．電子雲の重心から原子核へ引いたずれのベクトルを $\boldsymbol{\delta}$ とすれば，双極子モーメントは

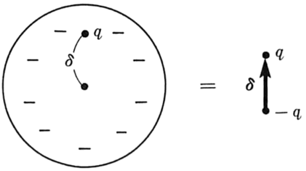


図 5.2　電場中の原子

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{\delta}$$

である．

物質中の原子が双極子になれば，各原子は双極子の電場をつくる．この電場と外からかけた電場 $\boldsymbol{E}_0$ の和が，物質中の電場 $\boldsymbol{E}$ である．微視的に見れば，この電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は位置 $\boldsymbol{r}$ によって複雑に変化するであろう．しかし我々が観測できる巨視的な電場は，微視的な電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を適当な巨視的な体積 ΔV の中で平均したものである．位置 $\boldsymbol{r}$ について平均をとることは，双極子の方の位置を ΔV の中でいろいろに動かして平均をとることと同じであるから，結局，双極子が一様な密度で連続的に分布しているときの電場を考えればよい．これは $+q$ と $-q$ の電荷が ΔV 中に一様に分布しているときにできる電場に等しい．ただし $+q$ と $-q$ は $\boldsymbol{\delta}$ だけずれているので，体積 ΔV 全体としてみたときも，正電荷の分布と負電荷の分布は $\boldsymbol{\delta}$ だけずれていなければならない．

平行板コンデンサーの内部に誘電体を入れた場合には，ΔV として誘電体全体をとればよい．図 5.3 からわかるように，物質中の正電荷と負電荷の分布は物質内部では打ち消されるが，物質表面に厚さ δ の正負の電荷分布が残る．

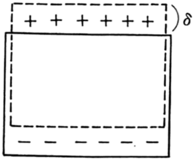


図 5.3 正電荷と負電荷の分布のずれ

単位体積中の原子の数を n とすれば，表面の単位面積当たりに現れる電荷 $\pm\sigma_P$ は

$$\sigma_P = nq\delta = np$$

で与えられる．ここで p は原子の双極子モーメント $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{\delta}$ の大きさを表す．単位体積当たりの物質が持つ双極子モーメントを

$$\boldsymbol{P} = n\boldsymbol{p}$$

とおけば，上式は

$$\sigma_P = P \tag{5.5}$$

と表される．

こうして，前に仮定した表面電荷に物理的な解釈を与えることができた．誘電体を現象論的に扱う場合には，双極子ができる微視的な機構は問わずに，物質の各部分が電気双極子になることを仮定する．物質の各部分が電気双極子モーメントを持つことを**分極**（polarization）といい，単位体積当たりの双極子モーメント $\boldsymbol{P}$ を分極の強さ，あるいは単に分極と呼ぶ．

上で述べたように，物質中の双極子の分布がつくる巨視的電場は，物質を電荷密度 $\pm\rho$ の正電荷と負電荷の分布の重なりと見て，この電荷分布が $\boldsymbol{\delta}$ だけずれるという描像から求めることができる．いま物質中に底面積 S，高さ h の微小な円柱を考え，その内部の正電荷が，高さの方向に δ だけずれたとしよう（図 5.4）．その結果，上底面と下底面からそれぞれ $\pm\rho S\delta$ だけの電荷がはみ出すので，円柱は双極子モーメント

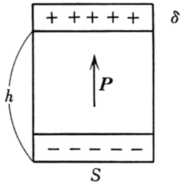


図 5.4 分 極

$$\rho S\delta\cdot h = \rho\delta\Delta V$$

を持つ（$\Delta V=Sh$ は円柱の体積）．この考察から，分極の大きさ $P=\rho\delta$ は，（i）単位体積の物質が持つ双極子モーメント，（ii）$\boldsymbol{P}$ と垂直な単位断面積を通ってずれる電気量，という二つの等価な意味を持つことがわかる．第二の見方によれば，表面電荷密度の表式（5.5）は自明である．

上で考察した例では分極 $\boldsymbol{P}$ は電場 $\boldsymbol{E}$ の方向に生じるので，（5.4）と（5.5）から，

$$\boldsymbol{P} = (\kappa-1)\varepsilon_0\boldsymbol{E} \equiv \chi\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{5.6}$$

という関係が得られる．定数 $\chi=\kappa-1$ は，その物質の**電気感受率**（electric susceptibility）と呼ばれる．$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{E}$ の線形関係（5.6）は，等方的な誘電体に対して一般に成り立つことが知られている．しかしあくまでも，物質ごとに実験で確かめられるべき経験法則である．

〔問〕（5.6）の定数 χ が無次元であることを確かめよ．

再び前のモデルを用いて，線形関係（5.6）の意味を考えてみよう．原子の電子雲の重心が原子核の位置からずれれば，当然元へ戻そうとする復元力が働く．この復元力と電場が及ぼす力のつり合いにより，ずれ $\boldsymbol{\delta}$ が定まる．$\boldsymbol{\delta}$ が小さければ，復元力は $\boldsymbol{\delta}$ に比例するであろう．したがってずれ $\boldsymbol{\delta}$ は電場 $\boldsymbol{E}$ に比例し，その結果，双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ および分極 $\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{E}$ に比例する．これは（5.6）に対する一つの解釈である．

〘注意〙（5.6）の右辺の電場は誘電体中の電場 $\boldsymbol{E}$ であり，誘電体に外からかけた電場 $\boldsymbol{E}_0$ ではない．（5.1）と（5.2）の比較からわかるように，$\boldsymbol{E}$ には $\boldsymbol{E}_0$ のほかに分極電荷がつくる電場が含まれる．$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{E}_0$ の関係は誘電体試料の形にも依存し，一般に複雑になる．

分極電荷　誘電体表面の分極電荷面密度（5.5）は，分極 $\boldsymbol{P}$ が表面と直交する場合に成り立つ表式である．$\boldsymbol{P}$ が表面の法線 $\boldsymbol{n}$ と角度 θ をなす場合には（図 5.5），表面の微小面積 dS の $\boldsymbol{P}$ と垂直な方向への射影は $dS\cos\theta$ であるから，dS を通ってはみ出す電荷は $P\cos\theta dS$ である．したがって表面の単位面積当たりの分極電荷は

$$\sigma_P = P\cos\theta = P_n \tag{5.7}$$

となる．ここで P_n は $\boldsymbol{P}$ の法線方向成分を表す．

分極 $\boldsymbol{P}$ が誘電体の内部で一様でなければ，誘導体の内部にも分極電荷が現

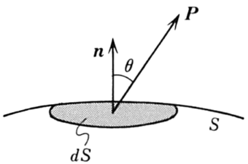


図 5.5　誘電体表面 S における分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ と法線ベクトル $\boldsymbol{n}$

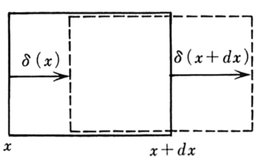


図 5.6　x 方向の分極による電荷の移動

れる可能性がある．まず，$\boldsymbol{P}$ が x 方向を向く場合を考えてみる．点 x および $x+dx$ において，単位面積を通って移動する電荷の量はそれぞれ $P_x(x)$ および $P_x(x+dx)$ であるから，図5.6のように単位底面積を持ち，高さが dx の円筒を考えると，それから外へ出ていく電荷は

$$P_x(x+dx)-P_x(x)=\frac{\partial P_x}{\partial x}dx$$

である．電荷がずれる前は正負の電荷分布が相殺していたのだから，電荷の移動後には，円筒内には $-\frac{\partial P_x}{\partial x}dx$ の電荷が残る．すなわち，単位体積当たり

$$\rho_P=-\frac{\partial P_x}{\partial x}$$

の分極電荷が現れる．

この結果を一般の分極 $\boldsymbol{P}(x, y, z)$ の場合に拡張するのは容易である．誘電体中に任意の閉曲面 S を考えると，分極のため微小面積 dS を通って外へはみ出す電荷は $P_n dS$ であるから（P_n は $\boldsymbol{P}$ の外向き法線方向成分），閉曲面 S から外に出る全電荷は

$$\int_S P_n dS$$

である．したがって分極の結果，S の内部には電荷

$$Q_P=-\int_S P_n dS \tag{5.8}$$

が残る．

上式の面積分は，§1.3 や §1.7 で考えた曲面 S から外へ出る流量と同じ形の表式であるから，§1.7 の議論により，S が微小な閉曲面の場合には

$$\int_S P_n dS=\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right)\Delta V$$

と変形できる（ΔV は S の内部の体積）．したがって S の内部には，単位体積当たり

$$\rho_P=-\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right)=-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{5.9}$$

の電荷が現れる．すべての閉曲面 S に対し（5.8）が成り立つので，任意の点における分極電荷密度が（5.9）で与えられることがわかる．

〔問〕 誘電体の表面では分極ベクトルが $\boldsymbol{P}$ からゼロへ連続的に変化するものとみなし

て，(5.9) から (5.7) を導け．

電気変位　静電場のクーロンの法則は，電荷分布から電場を与える公式である．誘電体が存在するときには，電荷として二種類のものを考慮に入れる必要がある．第一は我々が空間内に自由に置くことのできる電荷で，これを**真電荷** (true charge) と呼ぶ．図 5.1 のコンデンサーの極板上の電荷は，真電荷の例である．第二は誘電体の表面および内部に現れる分極電荷で，これは本来は誘電体の原子・分子が電気双極子になっている状態を，巨視的にみて分極電荷という形で代表させた，いわば見かけ上の電荷であって，誘導体から取り出すことのできないものである．しかし電場の源としては，真電荷と全く同等な役割をする．真電荷と分極電荷の電荷密度をそれぞれ $\rho(\boldsymbol{r})$，$\rho_P(\boldsymbol{r})$ とすれば，電場の源となる全電荷密度は

$$\rho_{\text{tot}}(\boldsymbol{r})=\rho(\boldsymbol{r})+\rho_P(\boldsymbol{r}) \tag{5.10}$$

である．

ところで分極電荷密度 $\rho_P(\boldsymbol{r})$ は，その場所の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ によって定まる．そこで上の $\rho_{\text{tot}}(\boldsymbol{r})$ をクーロンの法則

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho_{\text{tot}}(\boldsymbol{r}')\frac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}dV' \qquad (\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

に代入しても，右辺も電場に依存するため，このままでは電場を与える式になっていない．

ここで，誘電体が存在する場合の**ガウスの法則**について考察してみよう．空間の任意の閉曲面 S に対して，ガウスの法則は (5.10) により

$$\varepsilon_0\int_S E_n dS=\int_V(\rho(\boldsymbol{r})+\rho_P(\boldsymbol{r}))dV$$

と書ける (V は S の内部の領域)．右辺を ρ の積分と ρ_P の積分に分けると，後者は領域 V 内にある分極電荷の総量を表す．これは (5.8) により

$$\int_V\rho_P dV=-\int_S P_n dS$$

で与えられるので，この分を左辺に移行すれば，上式は

$$\int_S(\varepsilon_0 E_n+P_n)dS=\int_V\rho dV$$

となる．ここで

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) \tag{5.11}$$

というベクトル場 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ を定義すれば，上式は簡単に

$$\int_S D_n dS = \int_V \rho dV \tag{5.12}$$

と表される．ベクトル場 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ を，**電気変位** (electric displacement) あるいは**電束密度** (electric flux density) という．(5.12) の左辺の量は，面 S から外へ出る電束と呼ばれる．(5.12) はガウスの法則を単に書き換えただけの式であるが，我々が自由に指定できる量と電場によって定まる量を両辺に分離してあるため，実用上便利なのである．

念のため，上で述べたことを微分形でくりかえしておこう．ガウスの法則

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho + \rho_P$$

に (5.9) を代入して移項すれば

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho$$

を得る．(5.11) で定義した $\boldsymbol{D}$ を用いれば，これは

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{5.12'}$$

と書ける．これが誘電体中のガウスの法則である．

電場を求めるためには，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の関係が必要である．分極 $\boldsymbol{P}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ の線形関係 (5.6) が成り立つ場合には，(5.6) を (5.11) に代入すれば，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の線形関係

$$\boldsymbol{D} = \kappa\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \equiv \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{5.13}$$

が得られる．$\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$ はその誘電体の**誘電率**と呼ばれる．

ガウスの法則から電場が求められる例を一つあげる．

【例 1】 誘電体中の点電荷がつくる電場　気体や液体は一般に誘電体である．相対誘電率 κ の気体あるいは液体の中に点電荷 q を置いたときの電場を求めよう．点電荷の位置を原点 O とする．O を中心とする半径 r の球面 S について，ガウスの法則

$$\int_S D_n dS = q$$

を考える．対称性から，$\boldsymbol{D}$ は O を中心とする動径方向を向き，その大きさは r のみによるはずだから，上式から直ちに

$$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

が得られる．したがって (5.13) により，電場の強さは

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\kappa}\frac{q}{r^2}$$

と求まる．すなわち，電場は真空中にくらべ $1/\kappa$ に減少する．

電場 $\boldsymbol{E}$ は単位電気量の試験電荷に働く力である．したがって電気量 q' の試験電荷をこの電場に持ち込むと，q' は力

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\kappa}\frac{qq'}{r^2} \tag{5.14}$$

を受ける．しかしこれから直ちに，誘電体中に実際に電荷 q, q' があるときに，q と q' が力（5.14）を及ぼし合うと速断することはできない．試験電荷は，それを持ち込んでも他の電荷の分布に影響を与えない程小さな仮想的な電荷であるが，現実には，電荷 q' の存在により周囲の分極状態が変わるので，その影響を考慮に入れる必要がある．この問題には本節の最後でふれることにしよう．

ここで，電気変位 $\boldsymbol{D}$ について，誤解を招きやすい点を一つ注意しておく．上の例やガウスの法則（5.12）の形から，$\boldsymbol{D}/\varepsilon_0$ は，真電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ がつくる電場，すなわち誘電体にかかる外部電場 $\boldsymbol{E}_0$ にほかならないと考えがちである．（この節の始めに出た，コンデンサーの極板上の電荷がつくる電場（5.1）が，外部電場の例である．）しかしこれは次に示すように一般には正しくない．

§ 1.4 で説明したように，ガウスの法則はクーロンの法則と等価ではない．真電荷がつくる外部電場 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ は，（5.12）と同じ形のガウスの法則

$$\varepsilon_0\int_S E_{0n}dS=\int_V \rho dV \tag{5.15}$$

のほかに，任意の閉曲線 C について循環がゼロという式，すなわち

$$\oint_C E_{0l}dl=0 \tag{5.16}$$

を満たす．もし $\boldsymbol{D}$ に対しても，任意の閉曲線 C について

$$\oint_C D_l dl=0 \tag{5.17}$$

が成り立てば，$\boldsymbol{D}$ が満たす式（5.12），（5.17）は $\boldsymbol{E}_0$ が満たす式（5.15），（5.16）と同等になり，確かに $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$ となる．

しかし実際には，$\boldsymbol{D}$ の循環を

$$\oint_C D_l dl=\varepsilon_0\oint_C E_l dl+\oint_C P_l dl$$

と表すと，右辺の第一項は $\boldsymbol{E}$ が静電場であれば消えるが，第二項は一般にはゼロにならない．たとえば誘電体の球を一様な外部電場 $\boldsymbol{E}_0$ の中におくと，球内に一様な分極 $\boldsymbol{P}$ が生じることが知られている．球の外部ではもちろん $\boldsymbol{P}=0$ であるから，図 5.7 に示す道 C についての $\boldsymbol{P}$ の循環は明らかにゼロでない．したがって（5.17）は成り立たず，$\boldsymbol{D}/\varepsilon_0$ と外部電場 $\boldsymbol{E}_0$ は一致しない．

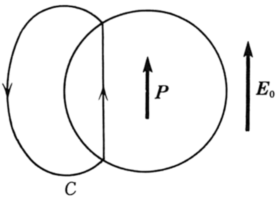


図 5.7 一様な外部電場の中の誘電体球

しかし例外的に，任意の閉曲線 C に対し (5.17) が成り立つ場合がある．たとえば一様な誘電体の中に帯電した導体や点電荷がある場合には，$\boldsymbol{D}$ の循環は

$$\oint_C D_l dl = \oint_C \kappa\varepsilon_0 E_l dl = \kappa\varepsilon_0 \oint_C E_l dl$$

と変形できるので，これは明らかに消える．コンデンサーの極板の間に一様な誘電体をつめる場合にも，電気力線の外部へのもれを無視すれば，同じことがいえる．二種類以上の誘電体が存在する場合にも，境界面において電場 $\boldsymbol{E}$ が常に境界面と直交していれば，$\boldsymbol{D}$ の循環はゼロになる．簡単な例題は上にあげた場合のどれかにあてはまることが多いので，このような場合には $\boldsymbol{D}$ が外部電場という直観的な意味を持つことになり考えやすい．しかし一般には，$\boldsymbol{D}$ は (5.11) で定義された補助的なベクトル場とみなすべきものである．

分極電荷が現れる場所　分極 $\boldsymbol{P}$ が場所によって変化していると，電荷密度 (5.9) の分極電荷が誘電体内部にも現れうることを前に述べた．しかし実際には，線形関係 (5.6) が成り立てば，分極電荷が現れるのは例外的な場所に限られる．これを次に示そう．

任意の閉曲面 S の内部の分極電荷の表式 (5.8) に，(5.6) を代入する：

$$Q_P = -\int_S P_n dS = -\int_S \varepsilon_0 \chi E_n dS \tag{5.18}$$

S が一様な誘電体の内部にある場合には，χ は一定だから積分の外へ出せる．さらにガウスの法則を用いれば，上式は

$$Q_P = -\varepsilon_0\chi \int_S E_n dS = -\chi(Q+Q_P) \tag{5.19}$$

となる．ここで Q は S の内部にある真電荷を表す．これより

$$Q_P = -\frac{\chi}{1+\chi} Q \tag{5.20}$$

という関係が得られる．

閉曲面 S のとり方は任意であるから，上の結果から誘導体の内部では，真電荷が存在しない所には，分極電荷も現れないことがわかる．真電荷がなくて

も分極電荷が現れうるのは，電気感受率 χ が一様でない所，すなわち誘電体の表面や異なる誘電体の境界面に限られる．

閉曲面 S の内部に真電荷 Q があるときは，分極電荷（5.20）が現れるので，S 内部の全電荷は

$$Q_{\text{tot}}=Q+Q_P=\frac{1}{1+\chi}Q=\frac{1}{\kappa}Q \tag{5.21}$$

に減少する．真電荷は自分と逆の符号の分極電荷を自分のまわりに引き寄せるので，外部から見ると電荷が $1/\kappa$ に遮蔽されるのである．例1で，誘電体中にある点電荷がつくる電場は，真空中の点電荷がつくる電場にくらべ $1/\kappa$ になることを見たが，これは分極電荷による点電荷の遮蔽の結果である．

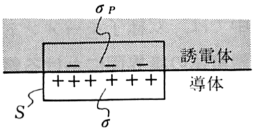


図 5.8　導体と誘電体の境界面

ここで浮かぶ疑問は，真電荷が自分と逆の符号の分極電荷を引き寄せるならば，真電荷と同符号の分極電荷が誘電体中に残るのではないかということである．しかし上で見たように，そのような電荷は誘電体内部には現れない．いいかえれば，真電荷と同符号の分極電荷は，誘電体の表面まで押しやられてしまう．これはクーロンの法則が逆二乗法則であることの結果である．

誘電体と導体が接している場合には，導体表面の単位面積を囲む閉曲面 S を図5.8のようにとり，上の議論を適用すれば，導体表面の電荷密度が σ のとき，それに接する誘電体表面には，電荷密度

$$\sigma_P=-\frac{\chi}{1+\chi}$$

の分極電荷が現れることがわかる．したがって導体表面の電荷は $1/\kappa$ に遮蔽される．

〔問〕 この場合にも（5.18）から（5.19）への変形ができることを確かめよ．

ここで，我々が日常経験する現象を一つとりあげよう．摩擦で帯電した物体は，紙などのような帯電していない誘電体をひきつける．その理由を考えてみる．

帯電した物体がつくる外部電場 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ の中におかれた誘電体は分極し，上述のように誘電体の表面に分極電荷が現れる．正と負の分極電荷はもちろん同

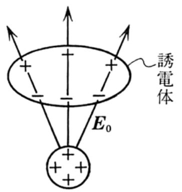


図 5.9　帯電物体の近くにおいた誘電体の分極

量だけ現れるが，帯電物体と反対符号の分極電荷の方が，帯電物体の近くに分布する．その結果，図5.9でいえば，負の分極電荷が受けるクーロン引力の方が正の分極電荷が受けるクーロン斥力に勝って，結局誘電体は帯電物体に引きつけられるのである．

このように，分極した誘電体が外部電場 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ から力を受けるためには，$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ が場所により変化していることが必要である．一様な外部電場 $\boldsymbol{E}_0$ の中では，双極子モーメントはトルクを受けるだけである．

誘電体の境界面における電場の不連続　異なる種類の誘電体が接している境界面の上には分極電荷が分布するので，その両側で電場に不連続が生じる．境界面の両側の領域を領域1,2とし，境界面の法線 $\boldsymbol{n}$ は領域1から2へ向く方向にとる（図5.10）．領域2が真空の場合には，境界面は誘電体1の表面にほかならない．以後いちいち断らないが，考える場所は境界面のすぐ近くとする．領域1,2における分極を $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ とすれば，境界面上には，領域1からは面密度 P_{1n} の分極電荷が押し出され，領域2からは面密度 $-P_{2n}$ の分極電荷が押し出されるので，境界面上に現れる分極電荷の面密度は

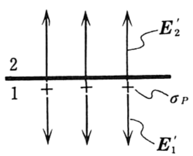


図 5.10　境界面上の分極電荷がつくる電場

$$\sigma_P = P_{1n} - P_{2n}$$

となる．（境界面上に真電荷はないものとする.）

境界面は一般には曲面であるが，考えている点の近くの部分は平面で近似できる．いま境界面の付近の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を，この平面上の分極電荷がつくるクーロン電場 $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r})$ と，それ以外のすべての部分 $\boldsymbol{E}''(\boldsymbol{r})$ の和

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}''(\boldsymbol{r})$$

と見ると，$\boldsymbol{E}''(\boldsymbol{r})$ は境界面の両側で連続である（不連続になる理由がない）．$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r})$ は平面上の電荷分布がつくる電場とみなせるから，境界面の両側で対称で，境界面と平行な成分（接方向成分）$\boldsymbol{E}_t'$ は領域1と2で連続であるが，法線方向成分は

$$E'_{1n} = -\frac{\sigma_P}{2\varepsilon_0} \quad , \quad E'_{2n} = \frac{\sigma_P}{2\varepsilon_0}$$

となり不連続である．そのため全体の電場 $\boldsymbol{E}$ についても，その接方向成分 $\boldsymbol{E}_t$ は境界面で連続であるが，法線方向成分に

$$E_{2n}-E_{1n}=\frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}(P_{1n}-P_{2n})$$

の不連続を生じる．ここで電気変位 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ を用いれば，上の関係は

$$D_{1n}=D_{2n} \tag{5.22}$$

と表すことができる．これと $\boldsymbol{E}_t$ の連続性

$$\boldsymbol{E}_{1t}=\boldsymbol{E}_{2t} \tag{5.23}$$

が，電場の接続条件である．

$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ の線形関係 $\boldsymbol{D}=\kappa\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ が成り立つ誘電体では，(5.22) は

$$\kappa_1 E_{1n}=\kappa_2 E_{2n} \tag{5.24}$$

と表せる．κ_1, κ_2 は領域 1,2 の相対誘電率である．

接続条件 (5.22)，(5.23) は，時間変化する電場に対しても成り立つ関係である．

【例 2】 極板間隔が d_1+d_2 の平行板コンデンサーの極板の間に，相対誘電率 κ_1, κ_2，厚さ d_1, d_2 の二枚の誘電体の板を，図 5.11 のように挿入する．極板上の電荷面密度が $\pm\sigma_0$ のときにできる電場を求めよう．

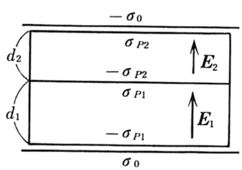


図 5.11 二種類の誘電体をつめたコンデンサー

最初に，電気変位 $\boldsymbol{D}$ を用いない初等的考察で解を求めてみる．対称性から，電場がそれぞれの誘電体の内部で一様であることは明らかだから，その大きさを E_1, E_2 とおく．その結果，それぞれの誘電体中に一様な分極

$$P_1=\varepsilon_0(\kappa_1-1)E_1 \quad , \quad P_2=\varepsilon_0(\kappa_2-1)E_2$$

が生じる．各誘電体の表面の分極電荷密度を図のように σ_{P1}, σ_{P2} とすれば，

$$\sigma_{P1}=P_1 \quad , \quad \sigma_{P2}=P_2$$

である．この分極電荷および極板上の真電荷が各誘電体の内部につくる電場は

$$E_1=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0-\sigma_{P1}) \quad , \quad E_2=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0-\sigma_{P2})$$

であるから，上の式を組み合わせれば，電場が

$$E_1=\frac{1}{\kappa_1}E_0 \quad , \quad E_2=\frac{1}{\kappa_2}E_0$$

と求まる．ここで $E_0=\sigma_0/\varepsilon_0$ は極板上の電荷がつくる外部電場である．(5.24) は明らかに成り立っている．

次に電気変位 $\boldsymbol{D}$ を用いて同じ問題を考える．この問題では電場は二つの誘電体の境界

面と直交するので，前に説明したように $\boldsymbol{D}$ は外部電場という意味を持つ．すなわち

$$D=\varepsilon_0 E_0$$

である．ここで $\boldsymbol{D}=\kappa\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ を用いれば，直ちに前述の電場が求まる．この場合には，連続性（5.22）は自明である．

エネルギー密度　§1.6 で考察した電場のエネルギー密度の表式を，誘電体が存在する場合に拡張しよう．例によって，最初は平行板コンデンサーの内部に相対誘電率 κ の誘電体をつめた場合について考える．

分極 $\boldsymbol{P}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ の線形関係（5.6）が成り立てば，誘電体を入れた場合にも，極板上の電荷 $\pm Q$ と極板間の電位差 V は比例する．したがって §1.6 の場合と同様に，コンデンサーを帯電させるのに要する仕事は

$$U=\frac{1}{2}QV \tag{5.25}$$

である．

極板の面積を S，極板間隔を d とすれば，V と Q は電場 $\boldsymbol{E}$，電気変位 $\boldsymbol{D}$ により

$$V=Ed \quad , \quad Q=SD$$

と表されるから，（5.25）は

$$U=\frac{1}{2}EDSd=\frac{1}{2}ED\times 体積$$

と書ける．この式は，エネルギー密度が

$$u=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E}^2=\frac{1}{2\varepsilon}\boldsymbol{D}^2 \tag{5.26}$$

で与えられることを示唆している．

〘**注意**〙 一定温度の下でコンデンサーを帯電させる場合には，コンデンサー内部の誘電体は一般に発熱する．したがって上記の U は，正確にいえば自由エネルギーである．

エネルギー密度の表式（5.26）が一般に成り立つことを確かめるには，導体系が誘電体中にある場合について，§1.6 と同様にエネルギー密度（5.26）の全空間にわたる積分を行ってみればよい．§1.6 では，全空間を電気力管に分け，u の積分を電気力管ごとに行った．ここでは同じことを，全空間を電束管（$\boldsymbol{D}$ の力管）に分けて行う．電束管は或る導体表面から始まって別の導体表面に終わり，途中のどこの断面をとってもそこを通る電束は一定で，端にある真

電荷に等しい．このことに注意すれば，u の積分は § 1.6 と全く同様に実行でき，結果は（1.58）に一致する．二個の導体の場合について，読者自ら試みてほしい．（5.26）は誘電体と電場から成る系のエネルギー密度であり，真空中の電場のエネルギー密度（1.56）の一般化である．

誘電体中の電荷に働く力　誘電体中にある導体が受ける力は，§ 1.6 の真空中の導体の場合と同様に，エネルギーの表式から仮想仕事の方法によって導くことができる．ここでは誘電体の気体・液体中にある導体について考えよう．

導体系が一様な誘電体中にある場合には，前に述べたように，電気変位 $\boldsymbol{D}$ は $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$ という意味を持つ．ここで $\boldsymbol{E}_0$ は，導体上の真電荷分布がつくる電場，すなわち同じ導体系が真空中にあるときにできる電場を表す．（誘電体が一様であれば，導体表面上の電荷分布は真空中の場合と同一である．）したがって（5.26）は

$$u=\frac{\varepsilon_0}{2\kappa}\boldsymbol{E}_0{}^2$$

となり，全エネルギー U は，導体系が真空中にある場合のエネルギー U_0 と

$$U=\int u dV=\frac{1}{\kappa}\int\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}_0{}^2 dV=\frac{1}{\kappa}U_0 \qquad (5.27)$$

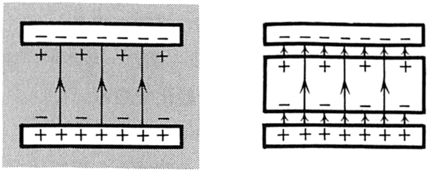
の関係にある．（もちろん導体に帯電する電荷は二つの場合で同一としての比較である．）

導体を或る方向に δx だけ仮想的に平行移動したとき，系のエネルギーが δU だけ変化するならば，導体に働く力のその方向への成分 F は，§ 1.6 で述べたように

$$-F\delta x=\delta U$$

という関係から求められる．ところで気体・液体は（仮想変位をした後も）一様な誘電体とみなせるから，（5.27）により δU は真空の場合のエネルギー変化 δU_0 の $1/\kappa$ である．これより直ちに，導体系が気体・液体中にある場合に各導体に働く力は，同じ導体系が真空中にある場合に比べ，$1/\kappa$ になるという結論が得られる．

帯電した微小な導体は点電荷とみなせるので，上に述べたことから，気体・液体中にある二つの点電荷の間に働く力は，真空中の場合の $1/\kappa$，すなわち（5.14）で与えられることがわかる．これは例 1 では保留していた結論であるが，エネルギーの考察によりそれが確かめられたわけである．



(a) (b)

図 5.12 (a)液体中に入れたコンデンサー,(b)固体の誘電体を挿入したコンデンサー

しかし例1でも述べたように，この結論は決して自明なことではない．それは次の例を見るとわかる．

帯電した平行板コンデンサーを誘電体の液体の中に入れる．極板に働く力は，上述の議論により，コンデンサーが真空中にある場合の $1/\kappa$ である（κ は誘電体の相対誘電率）．しかしこの結論は，直観的には奇妙に見える．というのは，図 5.12 の（a）で，上の極板の電荷に力を及ぼす電荷は，下の極板に帯電する電荷および誘電体と極板の境界に現れる分極電荷であるが，分極電荷が極板の電荷に及ぼす力は明らかに相殺するので，下の極板からの力だけが残り，これはコンデンサーが真空中にある場合と同じはずだからである．

このことは，図 5.12 の（b）のように，コンデンサーの極板の間に，固体の誘電体を入れた場合を考えるともっとはっきりする．その際，誘電体と極板の間に僅かの隙間が残るようにしておく．この系に対するエネルギーを計算し，再び仮想変位により極板に働く力を求めると，今度は真空中の場合と同一の結果が得られる．この結果は上述の直観的な考察とも一致する．

上の（a）と（b）の場合の電荷分布は同一なのだから，（a）の場合に一見パラドックスが生じた理由は，（a）の場合に極板に働く力は静電気力だけではないためであろうと想像できる．もし極板の間の液体の圧力が極板の外部の圧力よりも高ければ，極板は圧力差による力を外向きに受け，この力が極板間の静電気力を弱めることになる．実際この予想は正しく，圧力差が（a）と（b）の力の差を再現することを示せるのだが，電場による圧力の変化の導出は本書の程度を超えるので，これ以上は立ち入らないことにする．

物質中にある電荷が受ける力は，エネルギーの表式から仮想変位の方法で常に正しく導かれるが，その結果の物理的な意味を理解することは一般に容易で

はない．上で述べたパラドックスは，その最も有名な一例である．

§ 5.2 磁　性　体

磁気的な性質に着目するとき，物質を磁性体という．磁性体の中で昔から知られていたのは，もちろん磁石である．§ 3.1 で述べたように，磁石がつくる磁場は，磁石の両端に正負の磁極（磁荷）があると仮定すれば記述できる．しかし，正または負の磁荷を磁石から単独にとり出すことはできないので，磁荷が磁極という形で磁石に実在するとは考えにくい．この困難をさけるには，正負の磁荷からできた微小な磁気双極子が，磁石の基本的要素であるとみればよい．しかしなお，磁気双極子が実在しながら，その片割れである磁荷が発見されないというのは釈然としない．ところが，§ 3.3 で学んだ環状電流と板磁石の等価性という事実があるために，基本的要素の磁気双極子を，微小な環状電流でおきかえることができる．これがアンペールの分子電流の仮説である．§ 3.4 でも述べたように，このアンペールの考えは，本質的な意味では現代物理学にも受け継がれている．

しかし巨視的な物質の電磁気学を展開する上では，物質の磁性が微視的な磁気モーメントに由来することを前提にすれば十分で，その磁気モーメントの本性が分子電流かそれとも微小な磁針かということは，以下で説明するように，電磁気学の内容に影響を及ぼさないのである．

磁　化　物質内部の微視的な磁気モーメントが一定方向にそろうと，物質は巨視的な磁気モーメントを持つ．このとき，物質は磁化されているといい，単位体積当たりの磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ を**磁化**（magnetization）と呼ぶ．磁化 $\boldsymbol{M}$ は，単位体積中の微視的な磁気モーメントのベクトル和であり，誘電体の場合の分極 $\boldsymbol{P}$ に対応する量である．

磁化 $\boldsymbol{M}$ の現れ方によって，磁性体は，**常磁性体**，**反磁性体**，**強磁性体**に大別される．大まかな言い方をすると，物質に磁場をかけたときに，磁場の方向に磁化 $\boldsymbol{M}$ を生じるのが常磁性体，磁場と逆方向に $\boldsymbol{M}$ を生じるのが反磁性体である．強磁性体の性質は複雑で，後でくわしく説明するが，外から磁場をかけなくても磁化 $\boldsymbol{M}$ を持ちうること，および $\boldsymbol{M}$ の大きさが（鉄の強磁性が日常的に経験されることからもわかるように）常磁性体や反磁性体の場合に比べ

けた違いに大きいことが特徴である．これに反して常磁性体や反磁性体の磁性は，我々に身近なものではない．常磁性体，反磁性体の系統的研究を始めたのはファラデイである．

磁化電流・磁極　磁化した磁性体がつくる磁場や，磁性体が外部磁場から受ける力について考えるとき，磁化 $\boldsymbol{M}$ を，それと等価な環状電流または磁殻で置きかえるとわかりやすい．これは，巨視的な磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ に対するいわば便宜的な描像であり，微視的な磁気モーメントの本性は何かという上で述べた問題とは一応別のことである．

微小体積 ΔV の直方体（あるいは円柱）状の磁性体が，高さの方向に磁化されているとしよう（図 5.13）．直方体の底面積を S，高さを h とする（$\Delta V=Sh$）．この直方体の磁気モーメント $\boldsymbol{M}\Delta V$ を，これと等価な環状電流あるいは磁殻で表してみる．

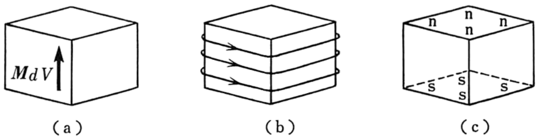


図 5.13　磁性体の磁気モーメント（a）と等価な磁化電流（b）および磁極（c）

磁化を環状電流で代表させるには，直方体の側面に単位高さ当たり J の環状電流が流れるものとみなせばよい．これを**磁化電流**と呼ぶ．この環状電流の磁気モーメントは $Jh\cdot S=J\Delta V$ であるから，面電流密度 J は

$$J=M \tag{5.28}$$

と定まる．

磁化を磁殻で代表させるときは，直方体の上底面と下底面に，それぞれ面密度 σ_m, $-\sigma_m$ で磁荷が分布するものとみなす．この磁荷は誘電体の分極電荷に相当するものであり，以後これを単に磁極と呼ぶことにする．このとき直方体の磁気モーメントは $\sigma_m S\cdot h=\sigma_m\Delta V$ となるので，磁荷面密度 σ_m は

$$\sigma_m=M \tag{5.29}$$

と定まる．

このように磁化 $\boldsymbol{M}$ の大きさは，磁化電流密度あるいは磁極の磁荷密度という直観的な意味を持っている．

有限の大きさの磁性体は，適当な大きさの微小体積の集まりとみなせる．各

微小体積の表面には，磁化に対する二つの描像に応じて，磁化電流あるいは磁極が分布する．磁化 $\boldsymbol{M}$ が一様であれば，磁性体の内部ではこれらの磁化電流ないしは磁極は，隣接する微小体積の磁化電流・磁極で打ち消されてしまうので，結局磁性体の表面の分布だけが残る．すなわち有限の大きさの磁性体の場合にも，表面だけに図 5.13 の磁荷電流または磁極が分布することになる．

磁化電流密度（5.28）は，磁化 $\boldsymbol{M}$ が磁性体の表面に平行な場合の表式である．一般に表面の法線を $\boldsymbol{n}$ とすれば，磁化電流密度（単位長さを通過する面電流）は，その方向まで含めて

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n} \tag{5.30}$$

で与えられる．

同様に，磁極の磁荷面密度（5.29）は $\boldsymbol{M}$ が表面と直交する場合の表式であり，一般の場合には

$$\sigma_m=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n}=M_n \tag{5.31}$$

となる．

〔問〕（5.30），（5.31）を導け．

〖注意〗 上で述べたことは，磁化 $\boldsymbol{M}$ の働きを磁性体表面の磁化電流あるいは磁極で代表させられるということで，現実にそのような電流や磁荷の分布があるわけではない．現実にあるのは，磁性体内部の磁気モーメントの分布である．

磁化 $\boldsymbol{M}$ が一様でなければ，磁性体の内部にも磁化電流あるいは磁極が現れうるが，それについては後でふれる．

常磁性体・反磁性体　前節で述べたように誘電体の場合には，分極 $\boldsymbol{P}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ の間の線形関係が広く成り立つ．磁性体ではこれに対応する関係が，常磁性体および反磁性体に対して成り立つことが知られている．

常磁性体・反磁性体を外部磁場 $\boldsymbol{B}_0\equiv\mu_0\boldsymbol{H}_0$ の中に置く．実験によれば，磁性体中に誘起される磁化 $\boldsymbol{M}$ は外部磁場に比例する：

$$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}_0 \tag{5.32}$$

比例定数 χ_m は無次元の物質定数で，これを**磁化率**または**帯磁率**（magnetic susceptibility）と呼ぶ．常磁性体では $\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{H}_0$ の方向に生じ，反磁性体では $\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{H}_0$ と反対の方向に生じるので，常磁性体では $\chi_m>0$，反磁性体では $\chi_m<0$ である．いくつかの物質の磁化率を表 5.2（次頁）に示す．

〔問〕 χ_m が無次元であることを確かめよ．

表 5.2　磁化率*

気体（0℃，1気圧）	
H_2	-2.23×10^{-9}
N_2	-6.8×10^{-9}
Cl_2	-2.3×10^{-8}
O_2	1.91×10^{-6}
固体	
C（ダイアモンド）	-2.2×10^{-5}
C（黒鉛）	-2.0×10^{-4}
Cu	-9.65×10^{-6}
Ag	-2.53×10^{-5}
Au	-3.44×10^{-5}
Bi	-1.65×10^{-4}
Mg	5.7×10^{-6}
Al	2.1×10^{-5}
Mn	9.0×10^{-4}
$FeSO_4\cdot7H_2O$	9.6×10^{-4}

*　磁性体の分野では CGS 単位系もよく用いられる．磁化率は無次元の量であるが，磁化の定義の差のため MKSA 単位系と CGS 単位系の磁化率の間にはχ(MKSA)$=4\pi\chi$(CGS)の関係があるので注意を要する．

誘電体の場合に注意したように，(5.32)の右辺の磁場には，本来は磁化自身がつくる磁場まで含めた磁性体内部の磁場を用いるべきである．しかし常磁性体・反磁性体では磁化率が非常に小さく，したがって磁化 $\boldsymbol{M}$ が小さいため，$\boldsymbol{M}$ がつくる磁場は外部磁場にくらべ無視できる．その結果 (5.32) の右辺の磁場は実質上 $\boldsymbol{H}_0$ とおけるのである．

磁性体を磁石の磁極に近づけると，磁性体は磁化され，その磁気モーメントに磁石の磁場が力を及ぼす．これは誘電体が帯電物体から力を受けることに対応する．誘電体の場合と同様の議論から，常磁性体は磁石に引きつけられ，反磁性体は磁石から反撥されることがわかる．

この力の大きさの程度をみるため，細長い棒状の常磁性体を，磁石の磁極の近くに図 5.14 に示すように置いてみる．議論を簡単にするため，磁性体は真空中にあるものとしよう．磁化を環状電流で代表させる描像では，磁化電流が円柱側面に分布し（図（a）），磁化を磁極で代表させる描像では，円柱の上底面に磁石の磁極と反対符号の磁荷が，円柱の側面と下底面に磁石の磁極と同符

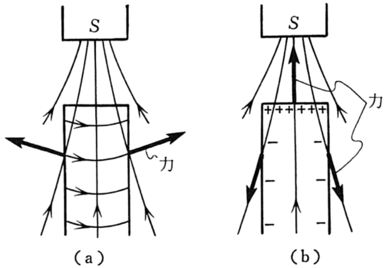


図 5.14　磁性体に働く力．（a）は磁場が磁化電流に及ぼす力，（b）は磁極に及ぼす力を示す．両者の合力は一致する

号の磁荷が分布する（図（b））.（今の場合，外部磁場 $\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})$ は一様でないから，磁性体の磁化 $\boldsymbol{M}$ も一様でない．にもかかわらず，線形関係（5.32）のため，磁性体内部には磁化電流あるいは磁極は現れない．内部に磁極が現れないことは誘電体の場合と同様の議論から明らかであろう．磁化電流が現れないことは後で説明する.）

磁場 $\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})$ が磁性体表面の磁化電流あるいは磁極に及ぼす力の合力は，図から明らかなように，磁性体を磁石に引きつける引力である．（そのためには，$\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})$ の大きさが磁石に近い程強く，したがって磁力線が磁石から離れるにつれて広がることが本質的である．一様な磁場は磁気モーメントにトルクしか及ぼさないことを思い出してほしい.）

磁極の描像では，上底面における磁場の大きさを B_0，円柱の断面積を S とすれば，上底面の磁荷 $\sigma_m S=MS$ に磁場が上向きに及ぼす力は，（5.32）により

$$B_0MS=\frac{\chi_m}{\mu_0}B_0{}^2S$$

である．側面および下底面の磁荷は下向きの力を受けるが，円柱が十分に細長い場合には，その合力は上底面が受ける力の 1/2 となる（詳しい説明は省略する）．したがって全体で，磁性体は

$$F=\frac{\chi_m}{2\mu_0}B_0{}^2S$$

の力で磁石に引かれる．同じ結果は，磁化電流の描像で導くこともできる．

例えば磁場１キロガウス，断面積 $1\,\mathrm{cm}^2$，$\chi_m=10^{-3}$ の場合には，$B_0=0.1\,\mathrm{T}$，$S=10^{-4}\mathrm{m}^2$，$\mu_0/4\pi=10^{-7}$ を上式に代入すれば $F=1/8\pi\times10^{-2}\mathrm{N}=0.041$ グラム重となる．

常磁性体・反磁性体の磁化率を実験から求めるには，この微小な力を測定する．

磁化がつくる磁場　強磁性体の性質を理解するためには，磁性体の磁気モーメントがつくる磁場について考察する必要がある．再び磁化 $\boldsymbol{M}$ の働きを磁化電流または磁極で代表させる二つの描像を用いることにして，磁化電流がつくる磁場を $\boldsymbol{B}_M(\boldsymbol{r})$，磁極がつくる磁場を $\mu_0\boldsymbol{H}_M(\boldsymbol{r})$ で表す．

§ 3.3 で学んだように，磁気モーメントの等しい環状電流と磁殻は，磁殻の外部では同一の磁場をつくる．したがって上の二つの磁場は，磁性体の外部で

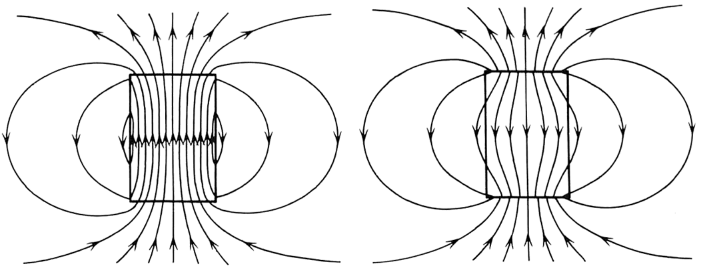


図 5.15　上向きに一様に磁化した円柱状の磁石がつくる磁場．磁化電流の描像（a）では側壁に電流が分布して磁場 $\boldsymbol{B}_M$ ができ，磁極の描像（b）では上下底面に磁荷が分布して磁場 $\mu_0\boldsymbol{H}_M$ ができる

は一致する：

$$\boldsymbol{B}_M(\boldsymbol{r})=\mu_0\boldsymbol{H}_M(\boldsymbol{r}) \qquad \text{（磁性体外部）} \tag{5.33}$$

しかし磁性体の内部では両者は一致しない．例えば軸方向に一様に磁化した円柱状の磁性体（図 5.15）の場合には，円柱側面に磁化電流が分布するとみなせばソレノイド型の磁場 $\boldsymbol{B}_M$ ができ（図(a)），円柱の上下底面に磁極が分布するとみなせばコンデンサーの電場と同形の磁場 $\mu_0\boldsymbol{H}_M$ ができる（図(b)）．両者がくい違う理由は，環状電流と磁殻がつくる磁場の等価性が磁殻の外部に限られるためである．同じ注意が，§3.3 の例2でソレノイドの磁場を求めた際にも必要であったことを思い出してほしい．

一般に磁性体内部の二つの磁場 $\boldsymbol{B}_M$ と $\mu_0\boldsymbol{H}_M$ の間には，次のような簡単な関係がある：

$$\boldsymbol{B}_M(\boldsymbol{r})=\mu_0(\boldsymbol{H}_M(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})) \tag{5.34}$$

(5.34) の一般的証明を与える前に，例についてこれを確かめておこう．（磁性体内部の $\boldsymbol{H}_M$ は**反磁場**と呼ばれる．）

【例 1】　細長い磁性体　　軸方向に一様に磁化した，長さ l，断面積 S の円柱状の磁性体を考える．磁化電流の描像では，これは単位長さ当たりの巻線電流が $J=M$ のソレノイドと同等である．したがって $l\to\infty$ の極限で（図 5.16），内部の磁場は無限に長いソレノイドの一様な磁場に近づく：

$$\boldsymbol{B}_M \longrightarrow \mu_0\boldsymbol{M}$$

一方，磁極の描像では，上下の底面に磁荷 $\pm\sigma_m S=\pm MS$ が分布するが，これが円柱内

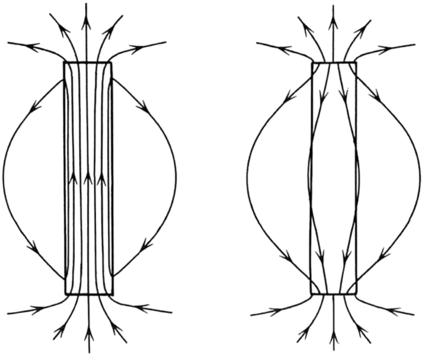


図 5.16　細長い円柱状の磁性体がつくる磁場．(a) は磁化を側壁に流れる磁化電流で表すときの磁場 $\boldsymbol{B}_M$，(b) は磁化を上下底面の磁極で表すときの磁場 $\mu_0\boldsymbol{H}_M$ を示す

部につくるクーロン磁場は，l^2 に反比例して減少する．したがって $l\to\infty$ の極限で

$$\mu_0\boldsymbol{H}_M \longrightarrow 0$$

となり，明らかに (5.34) は満たされている．

【例 2】 扁平な磁性体　再び例 1 の磁性体で，今度は $l\to 0$ の極限を考える(図5.17)．磁化電流の描像では，これは円電流 $I=lM$ と同等で，磁場は l に比例して減少する：

$$\boldsymbol{B}_M \longrightarrow 0$$

磁極の描像では，磁場は，無限に広い平行板コンデンサーの電場と同じになる：

$$\mu_0\boldsymbol{H}_M \longrightarrow -\mu_0\boldsymbol{M}$$

したがってこの場合も (5.34) が成り立っている．

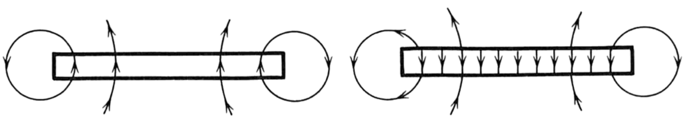


図 5.17　平たい円板状の磁性体がつくる磁場．(a)，(b) の意味は図 5.16 と同じ

(5.34) の証明　磁性体内部の任意の点 P における磁場を考える．P を含み，磁化 $\boldsymbol{M}$ の方向の軸を持つ細長い微小な円柱を考え，磁性体をこの円柱の外部と内部に分ける(図5.18)．磁性体が P につくる磁場は，円柱の外部の磁性体が P につくる磁場と，円柱の内部の磁性体が P につくる磁場の和である．前者を考えるときは点 P は磁性体の“外

部”にあるので，磁性体に対し磁化電流あるいは磁極のどちらの描像をとっても，P にできる磁場は同一である．後者の磁場は，例 1 で考えた細長い磁性体が内部につくる磁場であるから，磁化電流の描像をとれば磁場は $\mu_0\boldsymbol{M}$，磁極の描像をとれば磁場はゼロである．したがって磁性体全体が P につくる磁場に対して，関係 (5.34) が成り立つ．

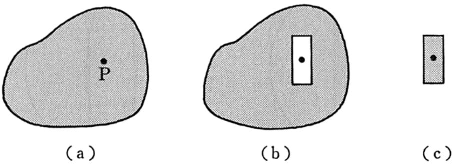


図 5.18　磁性体（a）を点 P を含む円柱の外部（b）と内部（c）に分ける

B* と *H　磁性体が外部磁場 $\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})\equiv\mu_0\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$ の中にあるときには，磁性体内外の任意の点の磁場は，外部磁場 $\boldsymbol{B}_0$ と磁性体がつくる磁場の和である．磁性体がつくる磁場として，磁化電流と磁極のどちらの描像をとるかによって，$\boldsymbol{B}_M(\boldsymbol{r})$ と $\mu_0\boldsymbol{H}_M(\boldsymbol{r})$ の二通りが考えられるので，全磁場にも

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})&=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{B}_M(\boldsymbol{r})\\ \mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})&=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})+\mu_0\boldsymbol{H}_M(\boldsymbol{r})=\mu_0(\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{H}_M(\boldsymbol{r}))\end{aligned}\right\}\qquad(5.35)$$

の二通りがある．両者は磁性体の外部では等しい：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\qquad(\text{磁性体の外部})\qquad(5.36)$$

それに対し磁性体の内部では，(5.34) により，全磁場に対しても

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\mu_0(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}))\qquad(5.37)$$

の関係がある．

磁性体の外部では $\boldsymbol{M}=0$ であるから，(5.37) は (5.36) も含む，磁性体内外で成り立つ関係といってよい．$\boldsymbol{B}$ を**磁束密度**，$\boldsymbol{H}$ を**磁場の強さ**と呼ぶ．

磁性体の内部で二つの磁場 $\boldsymbol{B}$ と $\mu_0\boldsymbol{H}$ が異なるとすれば，一体そのうちのどちらが真の磁場を表すのか，という疑問が当然生じるであろう．

磁性体の磁化がつくる磁場は，磁性体の構成要素である電子の磁気モーメントがつくる微視的な磁場を，巨視的な体積内で平均したものである．量子力学によれば，電子の磁気モーメントによる磁場はわき出しを持たない場であるため，これを微小な環状電流による磁場とみなすことができる．したがって微視的な磁場の平均は，磁化電流による磁場 $\boldsymbol{B}_M$ となる．その意味で，$\boldsymbol{B}$ の方が磁性体中の真の磁場であるといえる．

しかし実は，$\boldsymbol{B}$ と $\mu_0\boldsymbol{H}$ のどちらが磁性体内部の真の磁場を表すかということは，巨視的な電磁気学にとっては答える必要のない問題なのである．磁化電流の描像では $\boldsymbol{B}$ が基本的な磁場で，$\boldsymbol{H}$ は（5.37）で定義される補助的な場であり，磁極の描像では $\mu_0\boldsymbol{H}$ が基本的な磁場で，$\boldsymbol{B}$ は（5.37）で定義される補助的な場であるが，どちらの描像をとっても，それから導かれる物理的な結論は常に一致する．別の言葉でいえば，どちらが真の磁場であるかということを，巨視的な物理学の実験で判定することは不可能なのである．

これは一見奇妙に見えるかもしれない．素朴に考えると，磁性体内部の電磁誘導や，磁性体内部で電荷に働くローレンツ力を実験で調べれば，$\boldsymbol{B}$ と $\mu_0\boldsymbol{H}$ のどちらが真の磁場かがわかるように思える．しかしこれは正しくない．後で説明するように，磁化電流と磁極のどちらの描像からも，誘導起電力を与えるのは $\boldsymbol{B}$ の磁束の時間変化であることが示せる．また磁性体が流体の場合には，磁性体中で電荷 q に働く力は，これも描像によらずに $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ であり，磁荷 q_m に働く力は $q_m\mu_0\boldsymbol{H}$ である．力に関するこの結論は前節でも用いた仮想仕事の方法で導かれるが，この結果を直観的に理解するのが簡単でないことと，現実に存在する気体・液体はすべて常磁性体か反磁性体で，$\boldsymbol{B}$ と $\mu_0\boldsymbol{H}$ の区別は実際上問題にならないので，これ以上立ち入らないことにする．（固体の磁性体中で電荷や磁荷に働く力は，本書の程度を超える問題である．）

磁化率・透磁率　　或る磁性体の磁化 $\boldsymbol{M}$ が磁性体内部の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に比例するならば，関係（5.37）により，$\boldsymbol{M}$ は磁場 $\boldsymbol{H}$ にも比例する．この線形関係を

$$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H} \tag{5.38}$$

と表し，磁化率 χ_m を定義する．これを（5.37）に代入すれば，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の線形関係

$$\boldsymbol{B}=(1+\chi_m)\mu_0\boldsymbol{H}=\kappa_m\mu_0\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H} \tag{5.39}$$

が得られる．$\kappa_m=1+\chi_m$ を**相対透磁率**または**比透磁率**，$\mu=\kappa_m\mu_0$ を**透磁率** (permeability) と呼ぶ．

常磁性体・反磁性体では（5.38）がよく成り立つこと，そしてその場合には，χ_m の値が小さいため（5.38）の $\boldsymbol{H}$ は外部磁場 $\boldsymbol{H}_0$ におきかえられることは前に述べた．

χ_m の値が小さくないときには，外部からかける磁場が一様でも，磁性体内

部に生じる磁化 $\boldsymbol{M}$ は一般に場所により変わる．しかし試料の形が楕円体で，外部磁場がその主軸の方向を向くときには，外部磁場に平行な一様な $\boldsymbol{M}$ が生じることが知られている．ここではその特別な場合として，細長い棒および扁平な円板の磁性体について述べる．どちらの場合にも，外部磁場 $\boldsymbol{B}_0 \equiv \mu_0 \boldsymbol{H}_0$ は中心軸方向を向く一様な磁場とする．

【例 3】 細長い円柱状の磁性体　磁極の描像では，例1で見たように，円柱の上下底面の磁荷がつくる磁場 $\mu_0 \boldsymbol{H}_M$ は，円柱の長さが十分に長ければゼロである．そのため磁場 $\mu_0 \boldsymbol{H}$ は外部磁場 $\boldsymbol{B}_0 \equiv \mu_0 \boldsymbol{H}_0$ に等しい：

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \tag{5.40}$$

したがって磁化 $\boldsymbol{M}$ は（5.38）により

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}_0 \tag{5.41}$$

となる．一方，磁化電流の描像では，磁化電流がつくる磁場 $\boldsymbol{B}_M$ はソレノイドの磁場 $\boldsymbol{B}_M = \mu_0 \boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{B}_0$ であるから，磁性体内部の $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_M + \boldsymbol{B}_0 = \kappa_m \boldsymbol{B}_0 \tag{5.42}$$

となる．これはもちろん（5.39）と（5.40）からも導ける．

【例 4】 扁平な円板状の磁性体　磁化電流の描像では，例2で述べたように，円板の厚さがゼロの極限で，磁化電流がつくる磁場 $\boldsymbol{B}_M$ はゼロである．ゆえに $\boldsymbol{B}$ は外部磁場 $\boldsymbol{B}_0$ に等しい：

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \tag{5.43}$$

一方，磁極の描像では，上と同じ極限で $\boldsymbol{H}_M$ は $\boldsymbol{H}_M = -\boldsymbol{M}$ であるから，磁場 $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_M = \boldsymbol{H}_0 - \boldsymbol{M}$$

になる．それにより生じる磁化 $\boldsymbol{M}$ は

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} = \chi_m (\boldsymbol{H}_0 - \boldsymbol{M})$$

より

$$\boldsymbol{M} = \frac{\chi_m}{1+\chi_m} \boldsymbol{H}_0 = \frac{\chi_m}{\kappa_m} \boldsymbol{H}_0 \tag{5.44}$$

と求められる．したがって $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\kappa_m} \boldsymbol{H}_0 \tag{5.45}$$

である．これはもちろん（5.39）と（5.43）から直接得られる結果である．

上の二つの例からわかるように，磁化率 χ_m の大きい磁性体（例えば軟鉄）では，大きな磁化 $\boldsymbol{M}$ を得るためには，試料を細長い棒状の形にしてその軸方向に外部磁場をかける必要がある．例4のような平たい試料では，磁極による磁場 $\boldsymbol{H}_M$ が外部磁場 $\boldsymbol{H}_0$ をほとんど打ち消して，全磁場 $\boldsymbol{H}$ は（5.45）が示すように非常に小さくなり，その結果磁化 $\boldsymbol{M}$ も，細長い試料の場合にくらべ

$1/\kappa_m$ にしかなれない.

境界面における磁場の接続　二種類の磁性体が接する境界では，磁場が不連続に変化する．境界面上の任意の点の近くでは，境界面を平面とみなすことができる．この平面を $z=0$ とし，$z<0$ および $z>0$ の領域を，それぞれ領域1，領域2と呼ぶことにする．ここでは磁化電流の描像を用いて，磁場の不連続の様子を見ることにしよう.

二つの領域における磁化 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ は境界で一般に不連続に変化する．そのため境界面上に磁化電流が流れる．磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を，境界平面上の磁化電流がつくる $\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r})$ と，それ以外の部分 $\boldsymbol{B}''(\boldsymbol{r})$ の和

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{B}''(\boldsymbol{r})$$

とみると，$\boldsymbol{B}''$ は境界面を通るとき連続的に変化する．したがって $\boldsymbol{B}$ の不連続は $\boldsymbol{B}'$ の不連続によって生じる．考えている点の付近で面電流が一定であれば，面電流がつくる $\boldsymbol{B}'$ は面の法線方向の成分（z 成分）を持たないから，$\boldsymbol{B}$ の法線方向成分は境界で連続である：

$$B_{1n}=B_{2n} \qquad (5.46)$$

ここで磁化の x 成分の寄与を考える（図 5.19）．領域1の磁化 M_{1x} は境界面上の $-y$ 方向の磁化電流 M_{1x} で表され，領域2の磁化 M_{2x} は，y 方向の磁化電流 M_{2x} で表される．したがって磁化電流の y 成分は

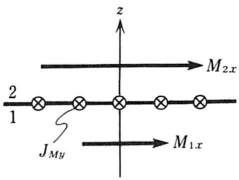


図 5.19　磁化の接方向成分の不連続により境界面に生じる磁化電流

$$J_{My}=M_{2x}-M_{1x}$$

となる.（J_{My} は，x 方向の単位長さを y 方向に通る磁化電流を表す.）この面電流は，領域2では x 方向の，領域1では $-x$ 方向の $\boldsymbol{B}'$ をつくる．すなわち

$$B'_{1x}=-\frac{\mu_0}{2}J_{My} \quad , \quad B'_{2x}=\frac{\mu_0}{2}J_{My}$$

したがって B_x' には境界で不連続

$$B'_{2x}-B'_{1x}=\mu_0 J_{My}=\mu_0(M_{2x}-M_{1x})$$

があり，これがそのまま B_x の不連続となる.

同様にして，磁化の y 成分の不連続による x 方向の磁化電流は，y 方向の $\boldsymbol{B}'$ をつくり，それには不連続

$$B'_{2y}-B'_{1y}=\mu_0(M_{2y}-M_{1y})$$

がある．

磁化の z 成分の不連続は境界面上の面電流を与えないので，（磁化電流の描像では）磁場の不連続の原因とはならない．

境界面と平行な成分 (B_x, B_y) を持つ二次元ベクトル（$\boldsymbol{B}$ の接方向成分）を $\boldsymbol{B}_t$ で表せば，上の結果はまとめて

$$\boldsymbol{B}_{2t}-\boldsymbol{B}_{1t}=\boldsymbol{B}'_{2t}-\boldsymbol{B}'_{1t}=\mu_0(\boldsymbol{M}_{2t}-\boldsymbol{M}_{1t})$$

と書ける．これを

$$\boldsymbol{B}_{1t}-\mu_0\boldsymbol{M}_{1t}=\boldsymbol{B}_{2t}-\mu_0\boldsymbol{M}_{2t}$$

と書き換えれば，両辺は $\mu_0\boldsymbol{H}$ の接方向成分にほかならず，したがって上式は

$$\boldsymbol{H}_{1t}=\boldsymbol{H}_{2t} \tag{5.47}$$

と表される．(5.46) と (5.47) が，境界面における磁場の接続条件である．

線形関係 $\boldsymbol{B}=\kappa_m\mu_0\boldsymbol{H}$ が成り立つ場合には，(5.47) は

$$\frac{1}{\kappa_{1m}}\boldsymbol{B}_{1t}=\frac{1}{\kappa_{2m}}\boldsymbol{B}_{2t} \tag{5.48}$$

と表せる．

領域2が真空 $(\kappa_{2m}=1)$ の場合には，(5.46) と (5.47) あるいは (5.48) は，磁性体の表面における $\boldsymbol{B}$ の接続を表す．ここで調べた接続条件が実際に問題になるのは領域1が強磁性体の場合であるが，後で述べるように強磁性体では κ_m が非常に大きな値を持つので，強磁性体の外部で $\boldsymbol{B}_t\neq 0$ ならば，内部の $\boldsymbol{B}$ は表面とほとんど平行になる．

〔問〕 例3，例4の結果が上の接続条件を満たすことを確かめよ．

〔問〕 磁極の描像を用いて上の接続条件を導け．

磁性体中の電磁誘導　図 5.20 に示すように，磁性体に二組の導線を巻き，一方のコイル C_0 に時間変化する電流を流す．このとき他方のコイル C には，どれだけの誘導起電力が誘起されるであろうか．

磁化電流の描像によれば，コイル C_0 の電流による外部磁場 $\boldsymbol{B}_0$ と，磁化 $\boldsymbol{M}$ に伴う磁化電流がつくる磁場 $\boldsymbol{B}_M$ の和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_M$ が全磁場である．したがってコイル C を貫く $\boldsymbol{B}$ の磁束

$$\Phi=\int_S B_n dS$$

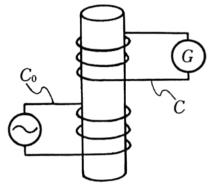


図 5.20 鉄心を入れたコイルに生じる誘導起電力

の時間変化が，C の誘導起電力 $\mathcal{E}$ を与える：

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\int_S\frac{\partial B_n}{\partial t}dS \tag{5.49}$$

ここで S は，閉曲線 C が張る任意の面を表す．

磁極の描像を用いるときには，もっと慎重な考察が必要である．まず，空間に電流分布と磁荷の分布の両方がある場合にできる磁場を $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})$ で表し，これが満たす法則を考えてみる．磁荷密度を $\rho_m(\boldsymbol{r})$ とすれば，§3.4 で述べたように，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})$ には $\rho_m(\boldsymbol{r})$ を源とするクーロン磁場が含まれるので，ガウスの法則

$$\int_S b_n dS=\mu_0\int_V \rho_m dV \tag{5.50}$$

が成り立つ（S は任意の閉曲面，V はその内部の領域，b_n は $\boldsymbol{b}$ の外向き法線方向成分）．

このように $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})$ がわき出しを持つ場合には，電磁誘導の法則は

$$\oint_C E_l dl=-\int_S\frac{\partial b_n}{\partial t}dS \tag{5.51}$$

のままでは不完全である．実際，上式があいまいさのない法則であるためには，右辺の積分は閉曲線 C を周とする任意の面 S に対して同じ値を与える必要がある．ところが C を周とする任意の二つの面を S_1, S_2 とし，S_1 と S_2 から成る閉曲面を S とすれば，(5.50) により

$$\int_{S_1}\frac{\partial b_n}{\partial t}dS-\int_{S_2}\frac{\partial b_n}{\partial t}dS=\int_S\frac{\partial b_n}{\partial t}dS=\mu_0\int_V\frac{\partial \rho_m}{\partial t}dV \tag{5.52}$$

が成り立つ．時間変化する磁荷分布があれば (5.52) の右辺は一般に消えないので，(5.51) の右辺は面 S のとり方により変わり，(5.51) は矛盾を含む．

では (5.51) をどう修正すれば，矛盾を含まぬ法則となるであろうか．これはちょうど，マックスウェルによるアンペールの法則の修正に対応する問題であり，全く同じように解決できる．ある場所の磁荷密度 ρ_m が時間変化すれば，当然その周囲に磁荷の流れ，すなわち“磁流”ができる．その磁流密度を $\boldsymbol{j}_m$ とすれば，磁荷の保存則は，(2.7) に対応して

$$\int_S (j_m)_n dS=-\int_V\frac{\partial \rho_m}{\partial t}dV$$

と表される（S は任意の閉曲面，V はその内部の領域）．これを用いれば

(5.52) は

$$\int_S \frac{\partial b_n}{\partial t} dS = -\mu_0 \int_S (j_m)_n dS$$

すなわち

$$\int_S \left(\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} + \mu_0 \boldsymbol{j}_m \right)_n dS = 0 \qquad (S \text{ は任意の閉曲面})$$

と書ける．それゆえ $\partial \boldsymbol{b}/\partial t + \mu_0 \boldsymbol{j}_m$ は，どこにもわき出しを持たないベクトル場である．

そこで電磁誘導の法則 (5.51) に磁流の寄与をつけ加え，

$$\oint_C E_l dl = -\int_S \left(\mu_0 \boldsymbol{j}_m + \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} \right)_n dS \tag{5.53}$$

と修正すれば，右辺は C を周とする任意の面 S に対して同じ値を与えるので，矛盾を含まぬ法則となる．これを，変位電流をつけ加えたアンペールの法則 (4.45) とくらべると，両者は右辺の符号を除けば全く対称的な形を持つことがわかる．すなわち，マックスウェル方程式における電場と磁場の対称性は，磁荷の存在を仮定すると，より明瞭になる．(5.53) の物理的意味は，もし磁流が存在すれば，それを源としてビオ・サバール型の電場ができるということである．

以上の一般的考察を磁性体に対して適用しよう．磁極の描像では，磁場の源は外部電流および（磁化に伴う）磁極であり，そのときできる磁場を $\mu_0 \boldsymbol{H}$ と表した．したがって上述の磁場 $\boldsymbol{b}$ が $\mu_0 \boldsymbol{H}$ に当たる．

磁性体中に磁化 $\boldsymbol{M}$ の方向に軸をもつ微小な円柱を考えると，その上下底面には，(5.29) により単位面積当たり $\pm\sigma_m = \pm M$ の磁荷が分布する．磁化 $\boldsymbol{M}$ が時間変化すれば σ_m が変化するので，この変化分は円柱の中を磁流として移動する．移動する磁荷は単位時間に単位面積当たり $\dfrac{\partial \sigma_m}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial t}$ であるから，磁化 $\boldsymbol{M}$ の時間変化に伴って磁流密度

$$\boldsymbol{j}_m = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t}$$

の磁荷の流れが生ずる．

そこで $\boldsymbol{b} \longrightarrow \mu_0 \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}_m \longrightarrow \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t}$ とおきかえれば，(5.53) は

$$\oint_C E_l dl = -\mu_0 \int_S \left(\frac{\partial M_n}{\partial t} + \frac{\partial H_n}{\partial t} \right) dS$$

となるが，右辺に現れたのは $\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$ の時間微分にほかならず，したがって上式は

$$\oint_C E_l dl = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS$$

と表される．こうして磁極の描像で考えても，誘導起電力はやはり (5.49) で与えられることがわかった．

強磁性体　強磁性体としては，単体の鉄，コバルト，ニッケル，およびこれらの元素やマンガンを含む合金，化合物がよく知られている．希土類元素の中にも強磁性を持つものがある．強磁性体にはキュリー点と呼ばれる臨界温度があり，それより高い温度では強磁性は失われ常磁性体となる．鉄のキュリー点は 1043K である．

強磁性体の磁場と磁化の関係は，ふつう，$\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{M}$，あるいは $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ の関係として表される．すぐ後で説明するように，実験から直接にわかるのは後者の関係であり，これから $\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$ を用いて前者の関係が導かれる．

磁性体に外部からかけた磁場 $\boldsymbol{H}_0$ と磁性体の内部に実際にできる磁場 $\boldsymbol{H}$ との関係は，一般には反磁場 $\boldsymbol{H}_M$ の存在のため複雑である．しかし図 5.21 のような円環状の試料の場合には，そのまわりに導線を一様に密に巻いて電流を流すと，この電流は円環の軸方向に沿う一様な（ソレノイドの）磁場 $\boldsymbol{B}_0 \equiv \mu_0 \boldsymbol{H}_0$ をつくるので，対称性から，磁化 $\boldsymbol{M}$ も円環の軸方向に一様にできる．この $\boldsymbol{M}$ には端がないので，どこにも磁極が現れず，したがって磁極がつくる磁場 $\boldsymbol{H}_M$ はゼロである．すなわち上の形の試料に対しては $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0$ で，電流の値から磁性体中の磁場 $\boldsymbol{H}$ が直接定まるので具合がよい．

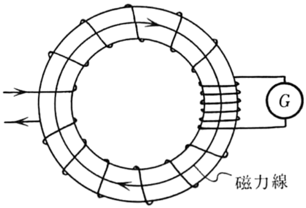


図 5.21　円環状の磁性体に二組のコイルを巻く

一方，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を知るには電磁誘導を用いる．上記の円環状の試料に第二のコイルを巻き，それを衝撃検流計につなぐ．いま第一の巻線の電流の強さを変え，$\boldsymbol{H}$ の大きさを ΔH だけ変化させたとする．それに伴い $\boldsymbol{M}$ および $\boldsymbol{B}$ も変わる．$\boldsymbol{B}$ の大きさの変化を ΔB とする．電流の変化に要する（短い）時間を Δt とすれば，この間だけ第二の回路には誘導起電力

$$\mathcal{E}=-\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t}=-NS\frac{\varDelta B}{\varDelta t}$$

が生じ，電流が流れる（S は試料の断面積，N は第二の巻線の巻数）．この電流は $\mathcal{E}$ に比例するので，検流計のコイルは検流計の磁場から $\varDelta B$ に比例する力積を受ける．この力積を測定するのが衝撃検流計である（第3章の問題 3.14 参照）．こうして $\varDelta H$ に伴う $\varDelta B$ が測定でき，H に対する B のグラフを画くことができる．

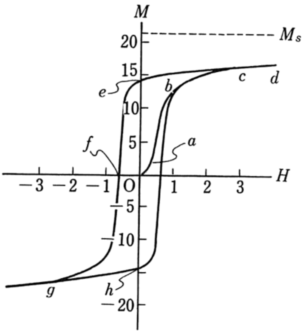


図 5.22　磁化曲線とヒステリシス・ループ．単位は横軸（H）がガウス/μ_0，縦軸（M）がキロガウス/μ_0

図 5.22 に，強磁性体の代表的な例として鉄の磁化の様子を示す．横軸は磁性体中の H，縦軸はそれに伴う M を表す．横軸と縦軸の尺度が 10^3 倍程度異なっていることに注意してほしい．

強磁性体が磁化されていない状態を O とし，ここから H を増していくと，磁化 M は曲線 O$abcd$ に沿って増加する．図の ab の範囲で M は急速に増加し，その後は最大値 M_s に達するまでゆっくりと変化する．最大値 M_s を**飽和磁化**と呼ぶ．純鉄の場合の $\mu_0 M_s$ は約 2.15 T である．曲線 O$abcd$ は**磁化曲線**と呼ばれる．

つぎに H を減らしていくと，dc の間は M はほぼ元の道を逆行して減少するが，それから先は元の道を離れ，ゆっくりした減少を続ける．特に H がゼロになっても，M はゼロにならない（点 e）．このときの M の値を**残留磁化**という．

引き続き反対方向に H をかけていくと，M は曲線 efg に沿って変化する．H をさらに増せば，M は逆向きの飽和磁化に達する．

再び H を減らし，ついで最初と同じ向きに H をかけていくと，M は曲線 $ghbc$ をたどる．H の変化に対する M の変化が往きと帰りで同じ道を通らないため，これは不可逆過程である．図 5.22 のループを**ヒステリシス・ループ**と呼ぶ*．

* ヒステリシス（hysteresis）は明治初年に東京大学で教えたユーイング（Ewing）が“おくれる”という意味のギリシア語から造った言葉である．

磁化曲線 Oabc の途中の点から H を減らすと，M はヒステリシス・ループの内部に小さなループを画く．このように H を適当に増減させれば，ヒステリシス・ループの内部の任意の点に達することができる．いいかえれば，磁場 H に対して磁化 M は一意的には定まらず，それまでにその試料がたどった歴史に依存した値をとる．これを**履歴現象**あるいは**ヒステリシス**と呼ぶ．

図 5.22 からわかるように，例外的な場所を除けば M は H にくらべはるかに大きな値をとる．したがって関係 $\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$ から定まる B の値は，$\mu_0 M$ の値と実質上ほとんど差がない．その結果 B と H の関係も，図 5.22 とほとんど同じ図で表される．図 5.23 は鉄に対する B と H の関係を，図 5.22 よりはるかに広い H の範囲で示したものである．

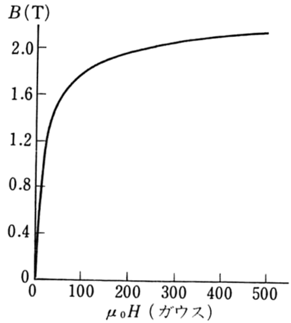


図 5.23　鉄の磁化曲線

ヒステリシスのため $\boldsymbol{H}$ から $\boldsymbol{B}$ が一意的に定まらないので，常磁性体や反磁性体で成り立つ

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\kappa_m\mu_0\boldsymbol{H} \tag{5.54}$$

のような関係は，強磁性体に対してはそのままでは意味を持たない．しかし例えば図 5.22 の磁化曲線 O$abcd$ の上に限定すれば $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の関係が一意的になるので，そこで (5.54) によって比透磁率 κ_m を定義することができる．もちろん $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の比例関係が成り立っている訳ではないから，こうして定義した κ_m は定数ではなく，磁場に依存して変わる．図 5.24 は図 5.22 の曲線 O$abcd$ 上の κ_m を B の関数として表したものである．(κ_m のふるまいは磁性体の種類によりいちじるしく異なる．)

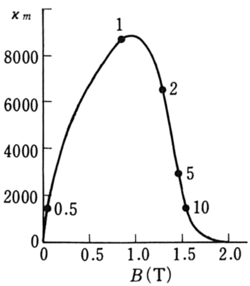


図 5.24　鉄の比透磁率 κ_m の B による変化．曲線上の数値は対応する $\mu_0 H$（ガウス）を表す

電磁石など鉄心を用いる機器の働きを考察するとき，ヒステリシスは無視し，(5.54) で定

義した比透磁率 κ_m を用いて議論を進めることが多いが，その場合，問題にする磁場の領域により κ_m の値が異なることに留意する必要がある．

永久磁石　外から磁場 $\boldsymbol{H}_0$ をかけなくても磁化している磁性体が永久磁石である．ちょっと考えると，前に述べた残留磁化，すなわち図 5.25 の M_r が永久磁石に対応すると思えるかもしれない．しかし磁性体の形が円環の場合を除けば，反磁場 $\boldsymbol{H}_M$ があるため $\boldsymbol{H}_0=0$ は $\boldsymbol{H}=0$ を意味しない．（円環状の磁性体は磁極をもたないため，ふつうの意味の永久磁石ではない．）

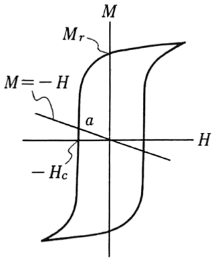


図 5.25　永久磁石の磁化

まず極端な場合として，平たい円板の磁性体を軸方向に磁化した場合を考えると，例2で見たように，円板の上下底面に現れる磁極は反磁場 $\boldsymbol{H}_M=-\boldsymbol{M}$ をつくる．今は外部磁場は無いので，$\boldsymbol{H}_M$ が $\boldsymbol{H}$ に等しい：

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{M}$$

したがって図 5.25 で，ヒステリシス・ループと直線 $M=-H$ の交点 a が，外部磁場が無いときの磁化を表す．横軸と縦軸の尺度が異なるためこの直線は水平に近く，点 a の磁化はほとんどゼロになってしまう．

磁性体の形を細長くしていけば反磁場はだんだん弱まるので，外部磁場が無いときの磁化 M は，図の点 a からヒステリシス・ループ上を上に動いていく．昔から，永久磁石に棒状または馬蹄形の強磁性体を用いるのは，このためである．永久磁石に用いるためには，ヒステリシス・ループの幅ができるだけ広い磁性体が有利であることは，上の議論から明らかであろう．この幅を表すのに図の H_c が用いられ，**保磁力**と呼ばれる．

〔注意〕　近年，フェライトと呼ばれる磁性体の中に H_c の値が極めて大きい（$\mu_0 H_c \gtrsim 2000$ ガウス）ものが開発され，平たい磁石も自由に作れるようになった．

アンペールの法則　ここでアンペールの法則を，磁性体が存在する場合に扱いやすい形に書き直しておこう．アンペールの法則は

閉曲線 C に沿う磁場の循環＝μ_0×（C と絡む全電流）

であった．磁性体の磁化の働きを磁極で表す描像では，電流はコイルなどを流れる外部電流だけである．以下では外部電流を**真電流**と呼ぶことにする．閉曲線 C と絡む真電流を I とすれば，磁極の描像でできる磁場は $\mu_0\boldsymbol{H}$ であるか

ら，アンペールの法則は

$$\oint_C H_l dl = I \tag{5.55}$$

と表される．

つぎに，磁化の働きを磁化電流で表す描像でも，アンペールの法則はやはり (5.55) に帰着することを示そう．

この描像では，全電流は真電流と磁化電流の和である．そこで閉曲線 C と絡む磁化電流と全電流をそれぞれ I_M, I_{tot} とすれば，この描像でできる磁場は $\boldsymbol{B}$ であるから，アンペールの法則は

$$\oint_C B_l dl = \mu_0 I_{\text{tot}} = \mu_0 (I + I_M) \tag{5.56}$$

の形に表される．

いま，磁性体を，図 5.26 に示すように微小な直方体の集まりと考えてみる．各直方体の高さをその場所の磁化 $\boldsymbol{M}$ の方向にとれば，磁化電流は直方体の側面を流れる環状電流とみなせる．直方体の高さを dh とすれば，側面を流れる磁化電流は (5.28) により Mdh である．

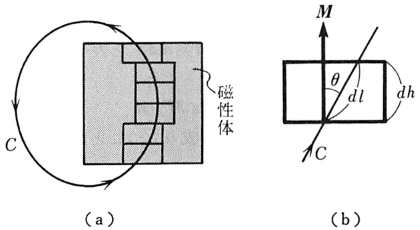


図 5.26　(a) 磁性体を通る積分路 C．C が貫く微小体積の側面の磁化電流が C と絡む．(b) 微小体積要素

閉曲線 C が磁性体を通るとき，C が或る微小直方体を貫けば，その直方体の側面電流は C と絡む．(5.56) の I_M はそのような磁化電流の寄与の和である．C の線要素を $d\boldsymbol{l}$ とし，$d\boldsymbol{l}$ と磁化 $\boldsymbol{M}$ のなす角を θ とすれば，図からわかるように，$d\boldsymbol{l}$ と絡む磁化電流は

$$Mdh = M\cos\theta dl = M_l dl$$

である．ここで M_l は，C の接線方向への $\boldsymbol{M}$ の成分を表す．したがって I_M は線積分

$$I_M=\oint_C M_l dl \tag{5.57}$$

で与えられる.

そこで (5.56) の I_M を左辺に移項すれば, (5.56) は

$$\oint_C (B_l-\mu_0 M_l)dl=\mu_0 I$$

となるが, $\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{M}=\mu_0\boldsymbol{H}$ により, これは (5.55) にほかならない. こうして再び, アンペールの法則が (5.55) の形に表された. (5.55) の右辺には我我が制御できる真電流だけが現れるため, この表式が便利なのである.

磁化電流密度　上の議論を微分形に書き直すには, 磁化電流が磁性体中で連続的に分布すると見るときの電流密度 $\boldsymbol{j}_M$ の表式が必要である. まず, 閉曲線 C を周とする面 S を貫く全磁化電流 $\int_S (j_M)_n dS$ について考える. 磁化電流は微小な環状電流であるから, C と絡まない磁化電流が S を通るときには, これは裏→表, 表→裏と S を二回通るので, 上の面積分には寄与しない. したがって S を貫く磁化電流の和は, C と絡む環状磁化電流の和に等しい. ところがこれは線積分 (5.57) で与えられるので,

$$\int_S (j_M)_n dS=\oint_C M_l dl$$

という関係が得られる.

ここで S として面積 $\varDelta S$, 法線 $\boldsymbol{n}$ の微小な面をとれば, § 1.7 の (1.66) で示したように, 右辺は $\boldsymbol{M}$ のカールを用いて $(\nabla\times\boldsymbol{M})\cdot\boldsymbol{n}\varDelta S$ と表せる. 左辺は $\boldsymbol{j}_M\cdot\boldsymbol{n}\varDelta S$ とおけるので, 上式は

$$\boldsymbol{j}_M\cdot\boldsymbol{n}=(\nabla\times\boldsymbol{M})\cdot\boldsymbol{n}$$

と表される. ここで任意の $\boldsymbol{n}$ に対して上式が成り立つことに注意すれば, 磁化電流の電流密度の表式

$$\boldsymbol{j}_M=\nabla\times\boldsymbol{M} \tag{5.58}$$

が得られる.

磁化電流の描像では, 微分形のアンペールの法則は

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}_{\rm tot}=\mu_0(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}_M)$$

と書ける. ここで $\boldsymbol{j}$ と $\boldsymbol{j}_{\rm tot}$ は, 真電流 (外部電流) および全電流の電流密度である. 上式に (5.58) を代入して移項すれば

$$\nabla\times(\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{M})=\mu_0\boldsymbol{j}$$

となるが, 左辺の括弧内は $\mu_0\boldsymbol{H}$ であるから, これは

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j} \tag{5.59}$$

と表される. これが微分形で書いた物質中のアンペールの法則である.

〔問〕 一様に磁化した磁性体の表面で, 磁化が $\boldsymbol{M}$ からゼロへ連続的に変化するとみれば, 電流密度 (5.58) は表面電流 (5.28) に帰着することを示せ.

磁性体の内部に微小な面 S を考えると，S を通る磁化電流は，上述のように S の周 C に沿う磁化の線積分

$$I_M=\oint_C M_l dl$$

で与えられる．もし磁性体内部で磁化 $\boldsymbol{M}$ が一様であれば，上の線積分は明らかにゼロであるから，磁性体内部では磁化電流は打ち消し合って現れないことがわかる．これは前に述べたことである．$\boldsymbol{M}$ が一様でなくても，比例関係 $\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$ が成り立つ磁性体ならば，C が磁性体内部にあれば上式は

$$I_M=\chi_m\oint_C H_l dl$$

となり，アンペールの法則（5.55）を用いれば

$$I_M=\chi_m I$$

という関係が得られる．したがって磁性体内部に真電流がなければ磁化電流も現れないことになり，磁性体の表面の磁化電流だけを考えればよいことがわかる．

【例 5】 鉄心中の磁場　図 5.21 の，一様に導線を巻いた細い円環状の鉄心の中の磁場を求める．円環の中心軸の長さを l，導線の巻数を N，電流を I とする．対称性から磁力線は中心軸に沿ってできるので，磁場の大きさは鉄心中で一様とみなせる．したがってアンペールの法則（5.55）は

$$Hl=NI$$

と書け，磁場の強さは

$$H=NI/l$$

と求まる．前述のようにこの場合の $\boldsymbol{H}$ は外部磁場 $\boldsymbol{H}_0$ に等しいので，H としてソレノイドの磁場が得られたのは当然である．（5.54）で定義した比透磁率 κ_m を用いれば，鉄心中の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は

$$B=\kappa_m\mu_0 NI/l$$

と表わされ，空心のソレノイドの場合の κ_m 倍になる．

上例の導線を，図 5.27 に示すように一個所にまとめて巻くと，磁場はどう変わるであろうか．この場合には，電流がつくる外部磁場 $\boldsymbol{B}_0\equiv\mu_0\boldsymbol{H}_0$ は鉄心中で一様ではない．一方，例 3，例 4 からわかるように，磁性体が外部磁場中にあるとき，磁性体中の $\boldsymbol{B}$ の磁性体表面に沿う成分は，同じ方向の $\boldsymbol{B}_0$ の成分にくらべ κ_m 倍に大きくなる．強磁性体では $\kappa_m\gg1$ であるから，円環中の $\boldsymbol{B}$ は中心軸とほとんど平行となる．

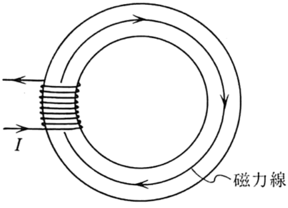


図 5.27　コイルを一個所に巻いた鉄心

そこで近似的に，鉄心内の $\boldsymbol{B}$ は中心軸と平行にできると考えてみる．あるいは，鉄心から外部への磁束の洩れを無視するといってもよい．この近似の下では鉄心中の磁束は一定で，鉄心の断面積が一定ならば $\boldsymbol{B}$ の大きさは鉄心中で一様となり，その結果 H も一様となる．こうして再び磁場は上と同様に求まる．すなわち例5で得られた磁場は，磁束の洩れを無視する近似では，導線の巻き方にはよらないことがわかる．

鉄心からの磁束の洩れを無視すれば，一般に断面積一定の細い鉄心の内部では一様な磁場ができる．これは，電池につないだ導線の内部に，導線の方向の一様な電場ができることとの類推で考えるとわかりやすい．この類推は厳密ではないが，鉄心中の磁場を近似的に求めるのに有用であり，**磁気回路**の方法と呼ばれる．その対応を表5.3に示す．

表 5.3　磁気回路と電流回路の対応

磁気回路		電流回路	
起磁力	NI	起電力	ε
磁　場	$\boldsymbol{H}$	電　場	$\boldsymbol{E}$
磁束密度	$\boldsymbol{B}$	電流密度	$\boldsymbol{j}$
磁　束	Φ	電　流	I
透磁率	μ	導電率	σ
磁気抵抗	$R_m=\dfrac{1}{\mu}\dfrac{l}{S}$	電気抵抗	$R=\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{l}{S}$

l は回路の長さ，S は回路の断面積

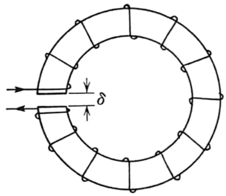


図 5.28

【例 6】　上で考えた鉄心に，図 5.28 のような幅 δ のせまい隙間をあけると，どのような磁場ができるであろうか．

磁束密度 $\boldsymbol{B}$ にはわき出しが無いから，$\boldsymbol{B}$ の力線は鉄心と隙間を通る閉曲線である．磁束が存在する領域は隙間の所で少しふくらむが，δ が小さければふくらみは無視できる．この近似では，B は鉄心内部と隙間で同一の値をとる．

鉄心中の磁場の強さを $\boldsymbol{H}$ とすれば (5.54) により $\boldsymbol{B}=\kappa_m\mu_0\boldsymbol{H}$ である．また隙間における磁場の強さを $\boldsymbol{H}_{\mathrm{gap}}$ とすれば，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}_{\mathrm{gap}}$ であるから，アンペールの法則は

$$\left(\frac{l}{\kappa_m\mu_0}+\frac{\delta}{\mu_0}\right)B=NI$$

と書け，これから B が

$$B=\frac{\kappa_m\mu_0 NI}{l+\kappa_m\delta}$$

と求まる．

$l\gg\kappa_m\delta$ ならば $B=\kappa_m\mu_0 NI/l$ で，B は空心のソレノイドの磁場の κ_m 倍になる．しかし κ_m の値が大きくて $l\ll\kappa_m\delta$ であれば，$B=\mu_0 NI/\delta$ となり，B は κ_m によらなくなる．なおこの場合，鉄心中の磁場の強さは $H=NI/\kappa_m\delta$ で，外部磁場 $H_0=NI/l$ に比べ $l/\kappa_m\delta$ 倍に減っているが，これは鉄心の両端（およびその他の部分）に分布する磁荷がつくる反磁場 H_M が，H_0 を弱めたためと解釈できる．

エネルギー密度　磁性体の磁化に要する仕事を調べるため，細長い磁性体の棒に導線を一様に巻いたソレノイドを考える．棒の長さを l，断面積を S，巻数を N とし，導線の電気抵抗は無視する．導線を流れる電流 I を変化させると，磁性体中の磁場が変化し，導線に誘導起電力 $-d\Phi/dt$ が生じる．ここで Φ はコイルを貫く磁束を表す．そのため I を変化させるには，回路にこの誘導起電力を打ち消す起電力

$$\mathcal{E}_{\text{ext}}=\frac{d\Phi}{dt}$$

を加える必要がある．この外部起電力が行う仕事率は

$$P=\mathcal{E}_{\text{ext}}I=I\frac{d\Phi}{dt} \tag{5.60}$$

である．

この例では磁性体中に棒の軸方向の一様な $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ ができる．$\boldsymbol{H}$ の大きさはソレノイドの磁場 $H=NI/l$ である．一方，コイルを貫く磁束は $\Phi=NSB$ であるから，(5.60) は

$$P=H\frac{dB}{dt}Sl=H\frac{dB}{dt}\times\text{体積}$$

と表すことができる．

ここでは簡単な例に対して上の結果を導いたが，一般の場合にも外部起電力の仕事率は，全空間にわたる積分

$$P=\int\boldsymbol{H}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}dV \tag{5.61}$$

の形に表せる．この式の証明は，§ 4.2 の場合と同様に行うことができるので，ここでは省略する．

$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の比例関係 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ が成り立つ場合には，上式は

$$P=\int\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}dV=\frac{d}{dt}\int\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{B}^2dV \qquad (5.62)$$

と変形できる．この結果は，外部起電力 $\mathcal{E}_{\text{ext}}$ が行う仕事が，単位体積当たり

$$u=\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{B}^2=\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}^2=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} \qquad (5.63)$$

のエネルギーとして蓄積される，と解釈できる．(5.63) は，磁場と磁性体から成る系のエネルギー密度であり，磁場のエネルギー密度 (4.33) の拡張である．

(5.63) は，同一の $\boldsymbol{B}$ で比べると，磁性体中のエネルギー密度が真空中のエネルギー密度の $1/\kappa_m$ であることを示している．磁性体の場合には，真空の場合に比べ $1/\kappa_m$ の電流で同一の $\boldsymbol{B}$ が得られるのだから，これはもっともであろう．

例えば例5で考えた隙間のある鉄心では，隙間のエネルギー密度は鉄心中のエネルギー密度の κ_m 倍であり，したがって $\kappa_m\delta\gg l$ の場合には，エネルギーはほとんど全部隙間に蓄積されることになる．

$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ が比例しない場合には (5.63) は成り立たない．さらにヒステリシスが存在すれば，以下で説明するように磁化の変化に不可逆的な発熱が伴うため，エネルギー密度 u を (5.61) から導くことは不可能になる．

いま $\boldsymbol{B}$ を $\delta\boldsymbol{B}$ 変えるのに要する仕事を δW とすれば，(5.61) により

$$\delta W=\int\boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B}\quad dV \qquad (5.64)$$

と書くことができる．すなわち，この変化を起こすために（磁性体の単位体積当たりに）要する仕事が，図 5.29 の斜線部分の面積で与えられる．

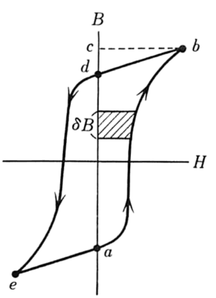


図 5.29 磁化に際し起電力がする仕事

そこで，磁性体の磁化がヒステリシス・ループを一周するとき，外部起電力が行う仕事を考えてみよう．H を増していって磁性体の状態が a から b まで変るとき，起電力がする仕事は，磁性体の単位体積当たり，図の $abca$ の部分の面積に等しい．つぎに H をゼロまで減らして状態が b から d へ移るとき，起電力は $dbcd$ の面積に等しい負の仕事をする．すなわちこの分の仕事は電源に

戻る．したがって，変化 $a \to b \to d$ の間に起電力がする仕事は，差し引き $abda$ の面積で表される．

同様に，反対方向に H をかける際に起電力が行う仕事は $dead$ の面積で与えられるので，結局ヒステリシス・ループを一周する間に起電力が行う仕事は，ヒステリシス・ループで囲まれた部分の面積と一致する．ところがヒステリシス・ループを一周すれば磁性体の状態は元の状態に戻るので，その間になされた仕事は，熱として失われることになる．ヒステリシスのある変化は不可逆変化であるため，一周の変化が発熱を伴うのである．

トランスや電磁石など交流機器に用いる鉄心には，この発熱を小さくするため，ヒステリシス・ループの幅がせまい磁性体を用いる必要がある．これは，永久磁石の強磁性体に要求されるのと正反対の性質である．

鉄心中の発熱の原因としては，ヒステリシスのほかに渦電流がある．（ヒステリシスによる損失と渦電流による損失をまとめて鉄損という．）渦電流による発熱を減らすためには，抵抗率の高い磁性体（例えば珪素鋼）の薄い板を層状に重ねたものを鉄心に用いる（第 4 章問題 4.20 参照）．

§ 5.3　物質中のマックスウェルの方程式

これまで考えてきた物質中の電場・磁場は，第 4 章の言葉でいえば準定常な電磁場の範囲のものである．物質中を伝播する電磁波を問題にするためには，これまでの考察をマックスウェルの方程式に一般化しておく必要がある．

第 4 章の場合と同様に，一般化の際に変更を要する法則は，アンペールの法則である．前節の（5.55）で与えたアンペールの法則

$$\oint_C H_l dl = I \tag{5.65}$$

は，時間変化をしない定常電流の場合に成り立つ法則である．右辺の I は，閉曲線 C と絡む真電流の総和を意味するが，定常電流の回路は常に閉回路であるから，電流回路が C と絡むかどうかはあいまいさ無しに定まる．

ところが時間変化する電流の回路は一般には閉じていないので，絡むという言葉が意味を持たなくなる．別のいい方をすれば，C を貫く真電流

$$I = \int_S j_n dS$$

が，C が張る面 S のとり方によって変わる．この原因は，非定常な真電流密度 $\boldsymbol{j}$ が一般にわき出しを持つことにある．

この困難を除くには，§ 4.3 の場合と同様の議論により，$\boldsymbol{j}$ をわき出しの無いベクトル場で置き換えればよい．真電荷の保存則

$$\int_S j_n dS = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

（S は任意の閉曲面，V はその内部の領域）は，ガウスの法則（5.12）を用いれば

$$\int_S \left(j_n + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS = 0$$

と表せる．したがって，ベクトル場 $\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ は，非定常な電流に対してもわき出しを持たない．それゆえ，アンペールの法則（5.65）を

$$\oint_C H_l dl = \int_S \left(j_n + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS \tag{5.66}$$

と修正すれば，矛盾を含まない法則が得られる．

（5.66）の付加項 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ を

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{5.67}$$

と分けると，右辺の第一項は § 4.3 で導入した真空中の変位電流である．それに対し第二項は，分極の時間変化に伴う分極電荷の流れの電流密度で，これを**分極電流**と呼ぶ．誘電体の内部では，（5.67）をまとめて変位電流と呼ぶ．

ここで，物質中のマックスウェルの方程式をまとめて書いておこう．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)}\quad \displaystyle\int_S D_n dS = \int_V \rho dV & \text{(b)}\quad \displaystyle\oint_C E_l dl = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \\ \text{(c)}\quad \displaystyle\int_S B_n dS = 0 & \text{(d)}\quad \displaystyle\oint_C H_l dl = \int_S \left(j_n + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS \end{array}\right\} \tag{5.68}$$

ρ は真電荷密度，$\boldsymbol{j}$ は真電流密度を表す．上の左の二式では，S は任意の閉曲面，V はその内部の領域であり，右の二式では，C は任意の閉曲線，S は C が張る任意の曲面である．

上のマックスウェル方程式を微分形で書けば

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)}\quad \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho & \text{(b)}\quad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \text{(c)}\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 & \text{(d)}\quad \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{array}\right\} \tag{5.68$'$}$$

となる.

これまでの議論をふりかえればわかるように，マックスウェルの方程式 (5.68), (5.68′) は，§ 4.3 の (4.46), (4.46′) を，物質が存在する場合に扱いやすいように書き換えたものである．例えば (5.68′) の (d) は，

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\nabla\times\boldsymbol{M}+\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

を書き換えた式である．この式は，全電流

$$\boldsymbol{j}_{\rm tot}=\boldsymbol{j}+\nabla\times\boldsymbol{M}+\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}$$

と変位電流 $\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ の和が，$\boldsymbol{B}$ の源であることを表している（磁化電流の描像）．$\boldsymbol{j}_{\rm tot}$ の中の磁化電流 $\nabla\times\boldsymbol{M}$ と分極電流 $\partial\boldsymbol{P}/\partial t$ を表面から消すために，$\boldsymbol{D}$ および $\boldsymbol{H}$ というベクトル場が新たに導入されたのである．

マックスウェルの方程式 (5.68) から電場，磁場を求めるためには，$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の関係が必要である．そのような関係として，線形関係

$$\boldsymbol{D}=\kappa\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{5.69}$$

$$\boldsymbol{B}=\kappa_m\mu_0\boldsymbol{H} \tag{5.70}$$

がまず頭に浮かぶが，ここで注意を要することは，上記の線形関係は任意の時間変化をする電場・磁場に対しては一般には成り立たないということである．前の二つの節で学んだ，誘電体および常磁性体・反磁性体に対する線形関係では，静電場，静磁場を考えていた．実験によれば，これらの物質に調和振動をする電場，磁場をかけると，再び上記の線形関係が成り立つが，その際，比例定数 κ，κ_m は一般に角振動数 ω に依存する．すなわち相対誘電率 κ，相対透磁率 κ_m は ω の関数である．例えば水の相対誘電率は，静電場に対しては $\kappa\approx80$ という大きな値を持つが，光に対しては $\sqrt{\kappa}\approx1.33$ である．したがって (5.69), (5.70) を用いるときは，特定の角振動数の電場・磁場を考える必要がある．

これらのことを含め，電磁波の詳細については，本シリーズの『波動』* にゆずることにする．

---

* 岩本文明：前掲書.

問　　題

5・1　相対誘電率 1000，厚さ 1 mm の誘電体を用いて電気容量 1000 μF の平行板コンデンサーを作るとしたら，極板の面積はどれだけになるか．極板の厚さを無視すれば，このコンデンサーの体積はどれだけか．

5・2　極板面積 S，間隔 d の平行板コンデンサーの極板を起電力 V の電池につなぐ．極板間に相対誘電率 κ，厚さ d の誘電体を挿入すると，コンデンサー内部の電場および極板上の電荷はどう変わるか．これからコンデンサーの容量を求めよ．

5・3　半径 a および $b(a<b)$ の導体の同心球面から成るコンデンサーの極板間に，相対誘電率 κ の誘電体をつめる．

（イ）　このコンデンサーの極板に電荷 $\pm Q$ を帯電させるときのコンデンサー内部の $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}$ の大きさを，中心からの距離 r の関数として求めよ．

（ロ）　どのような分極電荷が現れるか．

（ハ）　このコンデンサーの容量を求めよ．

5・4　半径 a の導体球を相対誘電率 κ，厚さ d の誘電体の被覆でおおう．この導体球の電気容量を求めよ．

5・5　極板面積 S，間隔 d の平行板コンデンサーに，相対誘電率 κ，厚さ d の誘電体を部分的に挿入する（図 5.30）．誘電体を挿入した部分の極板の面積を $xS(0 \leqq x \leqq 1)$ とする．

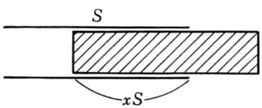


図 5・30

（イ）　極板が電荷 $\pm Q$ を帯電しているときの内部の電場を求めよ．電荷は極板上にどう分布するか．

（ロ）　このコンデンサーの容量を求めよ．

5・6　面積 S，間隔 d の平行板コンデンサーを起電力 V の電池につないで帯電させる．

（イ）　電池をはずしてから相対誘電率 κ，厚さ d の誘電体を極板間に挿入すると，コンデンサーのエネルギーはどれだけ変化するか．変化分はどこから来たか．

（ロ）　電池をつないだままで誘電体を挿入する場合について，上と同じ問題を考えよ．

5・7　ヘリウムのような単原子分子気体の電気感受率 $\chi=\kappa-1$（κ は相対誘電率）について考える．

（イ）　電場 $\boldsymbol{E}$ の中で原子に電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}=\alpha\boldsymbol{E}$ が誘起されるとき，α を分極率と呼ぶ．χ を α および単位体積中の原子数 N で表せ．

（ロ）　原子は半径 a の球で，球内には全電荷 $-Zq_e$ の負電荷（電子）が一様な電荷密度で分布し，中心に正の点電荷 Zq_e（原子核）が静止しているというモデルを考える．電場 $\boldsymbol{E}$ がかかると原子核は球の中心からずれる．ずれの大きさは，$\boldsymbol{E}$ による力と正負電荷間のクーロン力の釣り合いにより定まる．このモデルに

基づく分極率 α を求めよ．

（ハ）χ の測定値は He(20°C，1気圧) 0.65×10^{-4}，Ne(25°C，1気圧) 1.23×10^{-4}，Ar(20°C，1気圧) 5.17×10^{-4} である．上のモデルをとるときの各原子の半径 a を求めよ．アボガドロ数は $N_A=6.02\times10^{23}$/mole である．

5.8 誘電体中に時間変化する電場 $E(t)=E_0\cos\omega t$ があると，分極 $P(t)$ は一般に $P(t)=\varepsilon_0\chi E_0\cos(\omega t-\phi)$ の形で時間変化する．位相のおくれ ϕ は，$P(t)$ が $E(t)$ の変化におくれてついていくことを表している．

（イ）電場として複素数の形 $E(t)=E_0e^{i\omega t}$ をとると，対応する分極は $P(t)=\varepsilon_0(\chi'-i\chi'')E(t)$ のように，複素数の電気感受率 $\chi'-i\chi''$ で表されることを示せ．

（ロ）上の複素数の電場に対しては，電束密度 $D(t)$ と電場の関係も $D(t)=(\kappa'-i\kappa'')\varepsilon_0E(t)$ のように複素数の誘電率で表されることを示せ．以下では $\dfrac{\kappa''}{\kappa'}\equiv\tan\delta$ とおく．

（ハ）極板面積 S，間隔 d の平行板コンデンサーの極板間にこの誘電体をつめる．極板間に $V(t)=V_0e^{i\omega t}$ の形の電圧を加えるときの極板上の電荷 $\pm Q(t)$ を求めよ．

（ニ）このコンデンサーの容量を $C=\kappa'\varepsilon_0\dfrac{S}{d}$ で定義する．（ハ）の電圧とそのとき流れる電流 $I(t)$ の関係は図 5.31 の形の回路と等価であることを示し，抵抗 r_p を求めよ．

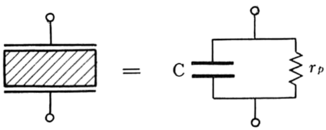


図 5.31

（ホ）交流電圧 $V(t)=V_0\cos\omega t$ をこのコンデンサーに加えるときに消費される電力（$V(t)I(t)$ の時間平均）を求め，上の等価回路からの結果と一致することを確かめよ．

（ヘ）容量 1000 μF の電解コンデンサーに $V(t)=V_0+V_1\cos\omega t$，$V_1=5$ V，$\nu=\omega/2\pi=50$ Hz の電圧が加わるとき，この振動数で $\tan\delta=0.1$ とすれば，コンデンサーの発熱量は何 W か．

5.9 直径 1 cm，長さ 5 cm の磁性体の棒に導線を 100 回一様に巻き，電流 50 mA を流す．磁性体の比透磁率を 8000 として，棒の内部の磁束密度，棒を通る磁束，棒が持つ磁気モーメントを求めよ．

5.10 軸方向に磁化 $\boldsymbol{M}$ で一様に磁化した円柱状磁性体がある．図 5.32 に示す中心軸上の点 P にお

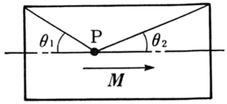


図 5.32

ける $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{H}$ を求めよ.

5.11 軸方向に磁化 $\boldsymbol{M}$ で一様に磁化した細長い棒状の二本の永久磁石の N 極と S 極が図 5.33 のように接している. 断面積はどちらも S とする.

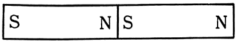


図 5.33

二つの磁石を引き離すのに要する力はどれだけか. ただし磁石の磁化は相手の磁場によって影響を受けないものとする.

5.12 § 5.2, 図 5.21 に示すドーナツ状の磁性体の中心軸の長さを 10π cm, 断面積を 1 cm^2 とし, これを巻数 500 および 100 の一次コイルと二次コイルを巻き, 二次コイルには抵抗 1 kΩ の検流計をつなぐ. 一次コイルに流れていた 50 mA の電流を切ると, 二次コイルには何クーロンの電気量が流れるか. 磁性体の比透磁率を 8000 とする.

5.13 振動数 50 Hz の振動磁場の中で磁性体の磁化が図 5.34 に示すヒステリシス・ループに沿って時間変化するとき, 磁性体の 1 cm^3 当たりの発熱量は何 W か.

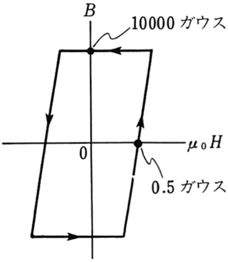


図 5.34

5.14 § 5.2, 例 6 の結果を, 磁性体に対する磁化電流の描像および磁極の描像から直接導け.

5.15 鉄心に導線を巻いてチョークコイルをつくるとき, 広い範囲の電流に対して磁束と電流の線形性を保つために, 図 5.28 のように鉄心に僅かな隙間をあける. その理由を説明せよ.

5.16 鉄心からの磁束の洩れを無視した理想的な変圧器(トランス)を考える (図5.35). 一次側, 二次側のコイルの巻数を N_1, N_2 とし, 一次側には電圧 $V_1(t)=V_0\cos\omega t$ をかけ, 二次側には抵抗 R をつなぐ. 一次側の抵抗は無視する.

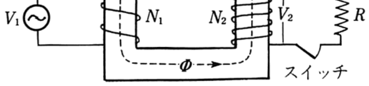


図 5.35

(イ) 図のように一次側, 二次側に電流 I_1, I_2 が流れるとき, 鉄心を通る磁束 Φ はどれだけか. ただし鉄心の長さを l, 断面積を S, 比透磁率を κ_m とする.

(ロ) 二次側のスイッチが開かれているときの, 磁束 $\Phi(t)$, 二次側電圧 $V_2(t)$, 一次側電力 (仕事率の時間平均) W を求めよ.

(ハ) スイッチを閉じると $\Phi(t)$, $V_2(t)$ は変化するか. また二次側電流 $I_2(t)$ を求めよ.

(ニ) スイッチを閉じる前後で, 一次側電流 $I_1(t)$ はどれだけ変化するか.

（ホ）　スイッチを閉じた後の一次側電力 W を求めよ．

5.17 強磁性体の磁化は，微視的にみれば，磁性体中の電子のスピン磁気モーメントに由来する．量子力学によれば，電子のスピン（自転）は磁気モーメント $\mu_B=\frac{q_e\hbar}{2m_e}$ を伴う．ここで $-q_e$, m_e は電子の電荷および質量，$\hbar$ はプランク定数で，$q_e=1.602\times10^{-19}$ C, $m_e=9.110\times10^{-31}$ kg, $\hbar=1.055\times10^{-34}$ J·s である．（μ_B はボーア磁子と呼ばれる．）磁化に寄与する電子の数は，磁性体中の原子の数とほぼ同数である．

（イ）　μ_B の値を $\mathrm{A\cdot m^2=J\cdot T^{-1}}$ 単位および $\mathrm{eV\cdot gauss^{-1}}$ 単位で計算せよ．

（ロ）　飽和磁化は，磁化に寄与するすべての磁気モーメントが磁場の方向を向いた状態と考えられる．Fe, Co, Ni の飽和磁化 M_S はそれぞれ $\mu_0M_S=2.15$ T, 1.79 T, 0.61 T である．磁化に寄与する電子の数は，原子一個当たりそれぞれ何個か．ただし Fe, Co, Ni の原子量は 55.8, 58.9, 58.7，密度（g/cm^3）は 7.87, 8.9, 8.85 で，アボガドロ数は $N_A=6.02\times10^{23}$/mole である．

5.18 単原子分子気体（稀ガス）を例にとって反磁性の微視的な起源を考える．

（イ）　原点に静止した原子核のまわりで，電荷 $-q_e$，質量 m_e の電子が xy 平面内で半径 r，角速度 ω の円運動をしているとする．それにより生じる磁気モーメントを求めよ．

（ロ）　次に z 方向の一様な磁場をかけ，磁場の大きさ $B(t)$ をゆっくりと増していく．電子には原子核のクーロン力のほかに，磁場によるローレンツ力および誘導電場による力が働く．その結果，円運動の半径 r は変わらず回転速度がゆっくり変化していくと仮定して，角速度の時間変化率 $\dot{\omega}$ を磁場の時間変化率 $\dot{B}$ で表せ．

（ハ）　磁場の大きさが B になったとき，角速度および磁気モーメントはどれだけ変化したか．（円運動の向きがどちら向きでも，磁気モーメントの変化分は同符号であることを確かめよ．）

（ニ）　Z 個（Z は原子番号で偶数）の電子のうち半数は左まわり，残りは右まわりの円運動を行うとすれば，原子は磁気モーメント $-\frac{q_e{}^2r^2}{4m_e}ZB$ を持つことを示せ．

（ホ）　実際にはすべての電子が xy 面内で運動する訳ではない．円運動の面についての平均をとると，上式の r^2 が $2/3\cdot r^2$ に変わる．そのことを考慮に入れ，単位体積中の原子数を N として，磁化率 χ_m の表式を求めよ．

（へ）　1 気圧，0℃ における磁化率 χ_m の値は，He : -1.1×10^{-9}, Ne : -3.8×10^{-9}, Ar : -11.0×10^{-9} である．この値から各原子の r を求めよ．（r は厳密にいえば原子中の電子の軌道半径の二乗の平均の平方根 $\sqrt{\langle r^2\rangle}$ である．）

〔付 録〕単 位 系

CGS ガウス単位系について

本書で採用した MKSA 単位系（SI 単位系とも呼ばれる）は，現在標準的に用いられている単位系であるが，以前は CGS ガウス単位系が主流であった．単位系の議論は面倒なだけで生産的ではないので，MKSA 系だけで押し通すことができればこれにこしたことはないが，現在でもガウス系を主に用いる分野もあるので，読者の便宜のため，二つの単位系の関係を簡単に説明しておこう．

MKSA 系からガウス系への変換には

（i） 電荷，磁荷の定義の仕方の変更

（ii） MKS 単位から CGS 単位への変換

の二つが含まれるので話が複雑になる．この中で（ii）は法則の形には影響を及ぼさない．（これは，例えば力学で単位系を変えても運動方程式の形が変わらないことから明らかであろう．）そこでまず（ii）は後まわしにして，（i）による法則の形の変更を調べよう．

電荷はクーロンの法則により定義されるが，その MKSA 系とガウス系における形を左と右に並べて書く：

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{R^2} \quad \Big| \quad F=\frac{q_1q_2}{R^2} \tag{1}$$

（クーロンの法則を

$$F=\frac{1}{4\pi}\frac{q_1q_2}{R^2}$$

と書く流儀もある．一般にクーロンの法則に $1/4\pi$ を残す流儀を有理化系，残さない流儀を非有理化系というが，この呼び方によれば MKSA 系は有理化系，ガウス系は非有理化系である．）

（1）で左から右へ移るには，電荷を

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}q \longrightarrow q \tag{2}$$

と置きかえればよい．（ここではまだ MKS 単位から CGS 単位への変換はしていないので，力や長さなどの力学的な量は変わらないことに注意．）電場 $\boldsymbol{E}$ はどちらの系でも

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E} \tag{3}$$

によって定義されるので，（2）に伴って

$$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{E} \tag{4}$$

と置きかえられる．（2）と（4）の結果，電荷に比例する量，すなわち電流 I，電荷密度 ρ，電流密度 $\boldsymbol{j}$，電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$，分極 $\boldsymbol{P}$ などは

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}I \longrightarrow I$$

のように（2）と同様に置きかわり，電場に比例する量，すなわち電位（差）φ，起電力 $\mathcal{E}$ などは

$$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\varphi \longrightarrow \varphi$$

のように（4）と同様に置きかわる．

磁荷を磁気のクーロンの法則で定義することにすれば，その MKSA 系とガウス系における形は

$$F=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_{1m}q_{2m}}{R^2} \quad \Bigg| \quad F=\frac{q_{1m}q_{2m}}{R^2} \tag{5}$$

である．（5）で左から右へ移るには，磁荷を

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}q_m \longrightarrow q_m \tag{6}$$

と置きかえればよい．磁束密度 $\boldsymbol{B}$ はどちらの系でも

$$\boldsymbol{F}=q_m\boldsymbol{B} \tag{7}$$

により定義されるので，（6）に伴って

$$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{B} \tag{8}$$

と置きかえられる．（6）と（8）の結果，磁荷に比例する量，すなわち磁気モーメント $\boldsymbol{m}$，磁化 $\boldsymbol{M}$ などの量は

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\boldsymbol{m} \longrightarrow \boldsymbol{m}$$

のように（6）と同様に置きかわり，$\boldsymbol{B}$ に比例する磁束 $\boldsymbol{\Phi}$ などの量は

$$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\boldsymbol{\Phi} \longrightarrow \boldsymbol{\Phi}$$

のように（8）と同様に置きかわる．

MKSA 系で書かれている公式をガウス系に書き換えるには，上の置きかえ（2），（4），（6），（8）を行い，余った ε_0, μ_0 を $\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$ により光速 c で表しさえすればよい．こうして得られた主な結果を表1にまとめてある．

変換（2），（4），（6），（8）は次元とは無関係であることに注意する必要がある．実際，電気感受率や磁化率は無次元の量であるが，二つの系で

$$\chi(\text{MKSA})=4\pi\chi(\text{ガウス}) \quad , \quad \chi_m(\text{MKSA})=4\pi\chi_m(\text{ガウス})$$

のように異なる値をもつ．なお $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$ は

$$\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}}\boldsymbol{D} \longrightarrow \boldsymbol{D}$$

$$\sqrt{4\pi\mu_0}\boldsymbol{H} \longrightarrow \boldsymbol{H}$$

と置きかえられる．これが（4），（8）と異なるのは，MKSA 系における $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ の定義の仕方の結果である．

次にガウス系の中で，（ii）の MKS 単位から CGS 単位への変換を行う．これは通常

の単位の変換であり，力や長さなどの力学的な量の変換によって（1），（5）の右側のクーロンの法則の形や（3），（7）の $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の定義式の形が変わらないように，ガウス系の中で更に $q, q_m, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ の変換をする．CGS 単位系における量に $'$ をつけて表せば $R'=10^2R$, $F'=10^5F$ の関係があるので，（1），（5），（3），（7）から $q'=10^{9/2}q$, $q'_m=10^{9/2}q_m$, $E'=10^{1/2}E$, $B'=10^{1/2}B$ の関係が得られる．

これを（2），（4），（6），（8）と組み合わせ，$\dfrac{\mu_0}{4\pi}=10^{-7}$, $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}=10^{-7}c^2$ に注意すれば，MKSA 系とガウス系の間の換算則

$$q'=10cq\fallingdotseq 3\times 10^9 q$$

$$q'_m=10q_m$$

$$E'=10^4c^{-1}E\fallingdotseq\frac{1}{3}\times 10^{-4}E$$

$$B'=10^4B$$

が導かれる．例えば MKSA 系の $B=1\,\mathrm{T}$ は CGS ガウス系では $B'=10^4$ ガウスと表される．(この事実に基づいて我々は磁束密度の補助単位としてガウスを用いたのである．)

他の量に対する変換則は上の結果から機械的に求められる．その結果は表 2 に示してある．

なお前に注意したように，MKS 単位から CGS 単位に移っても，表 1 にあげたガウス系における法則の形は，光速 c として CGS 単位による値 $c\fallingdotseq 3\times 10^{10}\,\mathrm{cm/s}$ を用いさえすれば，そのまま成り立つのである．

表 1　MKSA 系とガウス系による主な公式

	MKSA 系	ガウス系
ローレンツの力	$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$	$\boldsymbol{F}=q\left(\boldsymbol{E}+\dfrac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)$
クーロンの法則	$\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^2}\hat{\boldsymbol{R}}$	$\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{R^2}\hat{\boldsymbol{R}}$
ビオ・サバールの法則	$d\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\dfrac{d\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}$	$d\boldsymbol{B}=\dfrac{I}{c}\dfrac{d\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}$
環状電流の磁気モーメント	$\boldsymbol{m}=IS\hat{\boldsymbol{n}}$	$\boldsymbol{m}=\dfrac{1}{c}IS\hat{\boldsymbol{n}}$
誘導起電力	$\mathcal{E}=-\dfrac{d\Phi}{dt}$	$\mathcal{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{d\Phi}{dt}$
真空中のマックスウェル方程式	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho$
	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$
	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$
	$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$	$\nabla\times\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{c}\left(4\pi\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$

	MKSA 系	ガウス系
エネルギー密度（真空中）	$u=\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2$	$u=\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)$
オームの法則	$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$
電気変位	$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}$
磁　場	$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-4\pi\boldsymbol{M}$
分極電荷密度	$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$	$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$
磁化電流密度	$\boldsymbol{j}_M=\nabla\times\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{j}_M=c\nabla\times\boldsymbol{M}$
電気感受率	$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{P}=\chi\boldsymbol{E}$
磁化率	$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$
誘電率	$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\kappa\boldsymbol{E},\ \ \kappa=1+\chi$	$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\ \ \varepsilon=1+4\pi\chi$
透磁率	$\boldsymbol{B}=\mu_0\kappa_m\boldsymbol{H},\ \ \kappa_m=1+\chi_m$	$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\ \ \mu=1+4\pi\chi_m$
物質中のマックスウェル方程式	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=4\pi\rho$
	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$
	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$
	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\left(4\pi\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$
エネルギー密度（物質中）	$u=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})$	$u=\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})$

表 2 物理量の単位および MKSA 単位系から CGS ガウス単位系への換算率
（CGS ガウス単位系の欄の数値は，例えば $1\mathrm{C}\fallingdotseq 3\times10^9$ statcoul を意味する.）

量	MKSA 単位系		CGS ガウス単位系
電気量 q	C（クーロン）	C=A·s	3×10^9 statcoul
電荷密度 ρ	$\mathrm{C/m^3}$		3×10^3 $\mathrm{statcoul/cm^3}$
電　流 I	A（アンペア）		3×10^9 statamp
電流密度 $\boldsymbol{j}$	$\mathrm{A/m^2}$		3×10^5 $\mathrm{statamp/cm^2}$
電　場 $\boldsymbol{E}$	V/m		$\frac{1}{3}\times10^{-4}$ statvolt/cm
電位(差) ϕ, V / 起電力 $\mathcal{E}$	V（ボルト）	V=J/C	$\frac{1}{300}$ statvolt
電気容量 C	F（ファラッド）	F=C/V	9×10^{11} cm
電気抵抗 R	Ω（オーム）	Ω=V/A	$\frac{1}{9}\times10^{-11}$ s/cm
抵抗率 $\rho=1/\sigma$	Ω·m		$\frac{1}{9}\times10^{-9}$ s
電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$	C·m		3×10^{11}

量	MKSA 単位系		CGS ガウス単位系
分　極 $\boldsymbol{P}$	C/m^2		3×10^5
電気変位 $\boldsymbol{D}$	C/m^2		$12\pi\times10^5$
磁 気 量 q_m	A·m		10
磁束密度 $\boldsymbol{B}$	T（テスラ）	$T=Wb/m^2$	10^4 gauss
磁　束 Φ	Wb（ウェーバー）	Wb=V·s	10^8 maxwell
インダクタンス L	H（ヘンリー）	H=Wb/A	
磁気モーメント $\boldsymbol{m}$	J/T	$J/T=A\cdot m^2$	10^3
磁　化 $\boldsymbol{M}$	A/m		10^{-3}
磁　場 $\boldsymbol{H}$	A/m		$4\pi\times10^{-3}$ oersted
力 $\boldsymbol{F}$	N（ニュートン）	$N=kg\cdot m/s^2$	10^5 dyne
エネルギー・仕事 U, W	J（ジュール）	J=N·m	10^7 erg
仕 事 率 P	W（ワット）	W=J/s	10^7 erg/s

注 1　statcoul=statcoulomb, statamp=statampere.

注 2　いわゆる EH 対応の立場をとる書物では，本書の磁気量 q_m，磁気モーメント $\boldsymbol{m}$，磁化 $\boldsymbol{M}$ と $\tilde{q}_m=\mu_0 q_m$，$\widetilde{\boldsymbol{m}}=\mu_0\boldsymbol{m}$，$\widetilde{\boldsymbol{M}}=\mu_0\boldsymbol{M}$ の関係にある $\tilde{q}_m, \widetilde{\boldsymbol{m}}, \widetilde{\boldsymbol{M}}$ を磁気量，磁気モーメント，磁化と定義する．$\tilde{q}_m$ の単位は Wb，$\widetilde{\boldsymbol{M}}$ の単位は T である．

基 本 定 数

真空の透磁率 μ_0	$\dfrac{\mu_0}{4\pi}=10^{-7}\,H/m$
真空の誘電率 ε_0	$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}=10^{-7}c^2=8.988\times10^9\,m/F$
光　速　度 c	$c=2.998\times10^8\,m/s$
電 子 の 電 荷 $-q_e$	$q_e=1.602\times10^{-19}\,C$

参　考　書

更に進んで電磁気学を学びたい読者のために，参考書をいくつかあげておく．

（1） R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands : The Feynman Lectures on Physics, vol. 2 (Addison Wesley)（日本出版貿易リプリント版）．邦訳：宮島訳『電磁気学』; 戸田訳『電磁波と物性』（岩波書店）．

（2） 高橋秀俊『電磁気学』（裳華房）．

（3） W. K. H. Panofsky, M. Phillips : Classical Electricity and Magnetism (Addison Wesley)．邦訳：西田・天野訳『電磁気学』（上，下）（吉岡書店）．

（4） J. D. Jackson : Classical Electrodynamics (John Wiley and Sons)．

（5） 霜田光一，近角聰信編『大学演習電磁気学』（裳華房）．

（6） 加藤正昭『演習電磁気学』（サイエンス社）．

（1）は，ノーベル物理学賞受賞者であるファインマンがカリフォルニア工科大学で行った一般物理学の講義に基いたもので，程度は本書よりやや高く，内容ははるかに豊富である．物理的な考え方を身につけたい読者には最も推薦したい書物である．できれば原書を熟読してほしい．

（2）は，著者が東京大学理学部で行った講義で，実験に関することにも多くのページがあてられている．物理学全体に対する著者の広い識見がにじみ出ている名著である．

（3）と（4）は，米国の大学院用の標準的な教科書である．残念ながら我が国ではこのような程度の高い講義はどこでも行われていないだろう．

（5）と（6）は，本書とほぼ同じ程度の内容の演習書である．

問 題 略 解

第 1 章

1.1 $1.24\times10^{36}:1$

1.2 $4.6\times10^{5}\,\mathrm{C}$

1.3 3.3 cm

1.4 電場は直線に関し軸対称で直線から距離 ρ の点では $E=\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda}{\rho}$

1.5 略

1.6 円筒面の内部では $\boldsymbol{E}=0$, 外部では中心軸に関し軸対称で中心軸から距離 ρ の点で $E=\dfrac{\sigma a}{\varepsilon_0\rho}$

1.7 $\phi(z)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}$, $E(z)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}$

1.8 $\phi(z)=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0a^2}(\sqrt{a^2+z^2}-z)$, $E(z)=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0a^2}\left(1-\dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$

1.9 単位球面上で天頂角が θ と $\theta+d\theta$ の間の帯の部分の面積は $d\Omega=2\pi\sin\theta d\theta$ であるからそれを積分すればよい.

1.10 q_1 と q_2 を結ぶ軸のまわりに任意の電気力線を回転させてできる曲面を考えると, その内部を通る電束はどこでも一定である. 問題図の点 P を軸のまわりに回転してできる円の内部を通る電束は

$$\frac{1}{2}q_1(1-\cos\theta_1)-\frac{1}{2}q_2(1-\cos\theta_2)=\frac{1}{2}(q_2\cos\theta_2-q_1\cos\theta_1)+\mathrm{const}$$

であることに注意すれば題意の式が得られる.

1.11 図 1

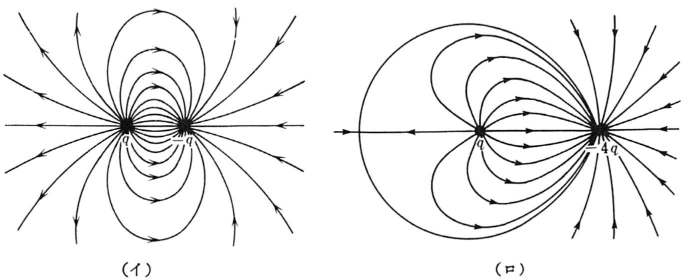


図 1

1.12 32 pF

1.13 （イ） $a:b$ （ロ） $\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}$

1.14 $C=2\pi\varepsilon_0 l/\ln\dfrac{b}{a}$

1.15 $3.8\times10^6\,\mathrm{V/m}$

1.16 内球を導体1，外球を導体2とする．電位係数は

$$D_{11}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\quad,\quad D_{12}=D_{21}=D_{22}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

容量係数は $C\equiv4\pi\varepsilon_0\Big/\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$ として

$$C_{11}=-C_{12}=-C_{21}=C\quad,\quad C_{22}=\frac{b}{a}C$$

1.17 結果は $\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

1.18 0.045 グラム重

1.19 （イ） 点電荷 q から導体平面へおろした垂線の足を O とすれば，O から距離 ρ の点の電荷面密度は $\sigma(\rho)=-\dfrac{q}{2\pi}\dfrac{x}{R^3}$ ， $R\equiv\sqrt{x^2+\rho^2}$．全電荷は $-q$.

（ロ） $-\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{(2x)^2}$

（ハ） $-\dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x}$

（ニ） 等電位の導体平面上で誘導電荷が動くのに仕事はいらないことに注意.

1.20 約 360 MeV．実際には原子核の表面積に比例する表面張力のエネルギー $17.8\,A^{2/3}$ MeV も考慮に入れる必要があり，これは核分裂によって増加するので，差し引き約 190 MeV のエネルギーが核分裂に際して放出される．これがいわゆる原子エネルギーである.

1.21 5.2 MeV

1.22 （イ） $-\dfrac{q}{4\pi}\dfrac{b^2-a^2}{aR^3}$ ， $R\equiv\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$

（ロ） $-\dfrac{a}{b}q$

（ハ） $-\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{ab}{(b^2-a^2)^2}$

1.23 § 1.5，例5の鏡像電荷 $-kq$ のほかに，球の中心 O に鏡像電荷 kq を置けばよい．球外の任意の点 P の電位は

$$\varphi(\mathrm{P})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{k}{R'}+\frac{k}{r}\right)\qquad(r=\mathrm{OP})$$

1.24 導体平面に関し与えられた直線と対称の位置に，電荷線密度 $-\lambda$ の鏡像直線をおく．任意の点 P の電位は，直線からの距離を ρ，鏡像直線からの距離を ρ' とするとき

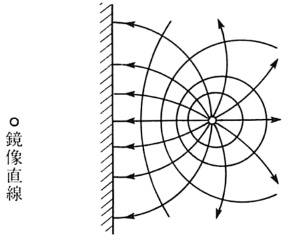


図 2

$$\varphi(\mathrm{P})=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho'}{\rho}$$

等電位面はアポロニウスの円（図2）.

1.25 0.15 pF

第2章

2.1 Cu 2.19 Ω, ニクロム 139 Ω

2.2 14 mm^2 以上

2.3 （イ） 31.8 Ω

（ロ） 3.18×10^4 V

（ハ） 637 V/m

2.4 0.029 Ω

2.5 略

2.6 （イ）直径 0.05 mm　（ロ）長さ 28 cm

2.7 明るさはジュール熱に比例するとすれば 1.54%

第3章

3.1 0.20 グラム重

3.2 1.26 ガウス, 0.44 ガウス

3.3 磁場 $\boldsymbol{B}$ は電流に関し右ねじ向きの渦状の場で, 中心軸からの距離 ρ の点の $\boldsymbol{B}$ の大きさは, $\rho\geqq a$ で $B(\rho)=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$, $\rho\leqq a$ で $B(\rho)=\dfrac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}$.

3.4 $\rho\geqq a$ では前問と同じ. $\rho\leqq a$ では $\boldsymbol{B}=0$.

3.5 磁場は $a<\rho<b$ にだけ存在し, $B(\rho)=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$.

3.6 磁場は軸方向にできる. $\rho\leqq a$ で $B(\rho)=\mu_0 jd$, $a\leqq\rho\leqq a+d$ で $B(\rho)=\mu_0 j(a+d-\rho)$, $a+d\leqq\rho$ で $B=0$.

3.7 略

3.8 前問の結果を用いてもよいが, 重ね合わせの原理から直ちにわかる.

3.9 （イ） $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{1}{r^3}(3\,\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{m})$

（ロ） $z\gg a$ のとき $B\approx\dfrac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$　$(m=Ia^2)$ となることを見よ.

3.10 （イ） $B(z)=\dfrac{2\mu_0 Ia^2}{\pi}\dfrac{1}{(z^2+a^2)\sqrt{z^2+2a^2}}$

（ロ） 略

3.11 $B(x)=\dfrac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}\,a}\left\{1-\dfrac{144}{125}\left(\dfrac{x}{a}\right)^4+\cdots\right\}$ で $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$ の項がないので, かなり広い x の範囲で $B(x)$ はほぼ一定値をとる. ちなみに $-\dfrac{a}{2}\leqq x\leqq\dfrac{a}{2}$ における｛ ｝の値は

x/a	0	±0.1	±0.2	±0.3	±0.4	±0.5
｛ ｝	1	0.9999	0.9982	0.9916	0.9754	0.9458

3.12 結果は $N=\pi a^2 IB$

3.13 51 グラム重・cm

3.14 $\theta_{\max}=\dfrac{NSB}{\sqrt{kM}}Q$

3.15 (a) $F=\dfrac{3m_1m_2}{r^4}$ (斥力)　(b) $F=-\dfrac{6m_1m_2}{r^4}$ (引力)

3.16 $p=\dfrac{1}{2}\mu_0 J^2$

3.17 (イ) $\omega_c=2\pi\nu_c=\dfrac{qB}{m}$

(ロ) 磁気モーメント $\mu=\dfrac{1}{2}q\omega_c r^2$

(ハ) $\dfrac{q}{2m}$

3.18 $0.96\times10^7\,\mathrm{m/s}$

3.19 $J(\rho)=\dfrac{q_m}{2\pi}\dfrac{\rho}{(h^2+\rho^2)^{3/2}}$

3.20 $\boldsymbol{B}=(B_x, B_y, B_z)$ で表す.

(イ)(ロ) $\boldsymbol{B}=(0, 0, B)$ 一様な磁場

(ハ) $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2}(-y, x, 0)$ 直線電流の磁場

(ニ) $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^5}(3xz, 3yz, 3z^2-r^2)$ 磁気双極子の磁場

3.21 点 P を xz 平面上にとる. C を周とする円板内の位置を 2 次元の極座標 (r, φ) で表すと, 円板上の微小面積 $rdrd\varphi$ が P に対して張る立体角は

$$d\Omega=\frac{z}{R^3}rdrd\varphi \quad , \quad R=\sqrt{z^2+\varphi^2+r^2-2\rho r\cos\varphi}$$

であるから, これを円板上で積分すれば Ω が得られる. r 積分を実行した結果が問題の表式である.

第 4 章

4.1 314 V

4.2 0.22 V

4.3 vBl

4.4 $\mathcal{E}=\dfrac{fR}{Ba}$, $v=\dfrac{fR}{(Ba)^2}$. どちらも R に比例.

4.5 (イ) $I(t)=\dfrac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$, $v(t)=\dfrac{\mathcal{E}}{Ba}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$, $\tau\equiv\dfrac{MR}{(Ba)^2}$

(ロ) $I(t)=\dfrac{\mathcal{E}}{R}\dfrac{1}{\Gamma R+(Ba)^2}(\Gamma R+(Ba)^2 e^{-\frac{t}{\tau'}})$,

$v(t)=\dfrac{\mathcal{E}Ba}{\Gamma R+(Ba)^2}(1-e^{-\frac{t}{\tau'}})$, $\tau'\equiv\dfrac{MR}{\Gamma R+(Ba)^2}$

4・6 $\mathcal{E}=-\dfrac{\mu_0 q_m v}{2a}\sin^3\theta$,　ここで　$\sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$

4・7 （イ）　$F=-\left(\dfrac{\mu_0 q_m}{2a}\right)^2\dfrac{v}{R}\sin^6\theta$

（ロ）　$-Fv=\dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\mu_0 q_m v}{2a}\right)^2\sin^6\theta=I^2R$

（ハ）　$\dfrac{3\pi}{32}\dfrac{(\mu_0 q_m)^2 v}{aR}$

4・8 超電導体表面の誘導電流の働きは，表面に関し q_m と対称の点においた鏡像磁荷 q_m により代表させられる（図3）．

q_m に働く力は $F=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_m{}^2}{(2h)^2}$　（斥力）

4・9 大地表面の電流分布は，磁場の源としては深さ h の所を通る直線電流で代表できる（図4）．

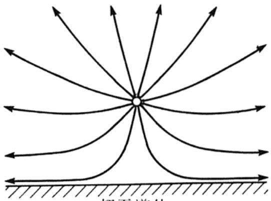


図 3

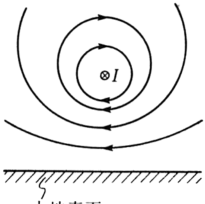


図 4

4・10 $L_{12}=L_{21}\equiv M=\mu_0 n_1 n_2 l S_2$

4・11 （イ）　結果は，$U=\dfrac{1}{2}L_1I_1{}^2+\dfrac{1}{2}L_2I_2{}^2+MI_1I_2$,　ここで　$L_1=\mu_0 n_1{}^2 S_1 l$,　$L_2=\mu_0 n_2{}^2 S_2 l$

（ロ）　$MI_2\delta I_1$　,　$MI_1\delta I_2$

4・12 R の両端の電圧 $V(t)$ は，$0\leqq t\leqq T$ では $V(t)=V_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$，$T\leqq t$ では $V(t)=V_0(1-e^{-\frac{T}{\tau}})e^{-\frac{t-T}{\tau}}$．ここで $\tau\equiv\dfrac{L}{R}$（図5）．

4・13 $\tau=1\,\mu\mathrm{s}$

4・14 コンデンサーの両端の電圧は $\tau=CR$ とおけば 4.12 の結果と同じ．

4・15 $L=\dfrac{\mu_0}{\pi}\left(\ln\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{2}\right)$

4・16 （イ）　0.07 μH

（ロ）　0.24 mH

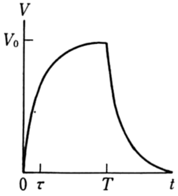


図 5

4・17 $\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{R_4}{R_3}=\dfrac{C_3}{C_4}$

4・18 0.90 W

4・19 $\dfrac{\pi}{16}a^4b\sigma\omega^2{B_0}^2$

4・20 (イ) $j(x,t)=\sigma\omega B_0\sin\omega t\cdot x$

(ロ) $\dfrac{1}{6}\sigma a^2(\omega B_0)^2$

4・21 1.3 W

4・22 (イ) $B_i(x,t)=\dfrac{1}{2}\mu_0\sigma\omega B(a^2-x^2)\sin\omega t$

(ロ) $\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2}=i\mu_0\sigma\omega B$

(ハ) $B(x,t)$ が x の偶関数であることおよび表面 $x=\pm a$ で $B(x,t)=B_0e^{i\omega t}$ となることに注意して解を求めればよい.

(ニ), (ホ) 略

(ヘ) 0.93 cm, 0.066 mm

第5章

5・1 面積 113 m^2, 体積 0.113 m^3=(48 cm)^3

5・2 $E=\dfrac{V}{d}$ 不変, $Q=\varepsilon_0ES\rightarrow\kappa\varepsilon_0ES$, $C=\kappa\varepsilon_0\dfrac{S}{d}$

5・3 (イ) $D(r)=\dfrac{Q}{4\pi r^2}$, $E(r)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\kappa r^2}$, $P(r)=\dfrac{\kappa-1}{\kappa}\dfrac{Q}{4\pi r^2}$

(ロ) 誘電体の内側および外側の表面. 面密度はそれぞれ

$$\sigma_P=-\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{Q}{4\pi a^2},\quad \sigma_P=\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{Q}{4\pi b^2}$$

(ハ) $C=4\pi\varepsilon_0\kappa\Big/\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

5・4 $C=4\pi\varepsilon_0(a+d)\Big/\left(1+\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d}{a}\right)$

5・5 (イ) $E=\dfrac{1}{1+(\kappa-1)x}\dfrac{Q}{\varepsilon_0S}$, 誘電体に面していない所の電荷面密度は, $\sigma=\dfrac{1}{1+(\kappa-1)x}\dfrac{Q}{S}$, 誘電体に面している所の面密度は $\sigma'=\kappa\sigma$.

(ロ) $C=(1+(\kappa-1)x)\dfrac{\varepsilon_0S}{d}$

5・6 (イ) $C_0\equiv\dfrac{\varepsilon_0S}{d}$ として $\varDelta U=-\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\kappa}\right)C_0V^2$. 誘電体を引きこむ仕事に使われた.

(ロ) $\varDelta U=\dfrac{1}{2}(\kappa-1)C_0V^2$. 電池がした仕事 $(\kappa-1)C_0V^2$ と誘電体を引きこむための仕事 $\dfrac{1}{2}(\kappa-1)C_0V^2$ の差.

5.7 (イ) $\chi = N\alpha/\varepsilon_0$

(ロ) $\alpha = 4\pi\varepsilon_0 a^3$

(ハ) He 0.59×10^{-10} m,　Ne 0.74×10^{-10} m,　Ar 1.18×10^{-10} m

5.8 (イ) $P(t)=\varepsilon_0\chi e^{-i\phi}E(t)$ より $\chi e^{-i\phi}\equiv\chi'-i\chi''$

(ロ) $D(t)=\varepsilon_0(1+\chi e^{-i\phi})E(t)$ より $1+\chi e^{-i\phi}\equiv\kappa'-i\kappa''$

(ハ) $Q(t)=\varepsilon_0(\kappa'-i\kappa'')\dfrac{S}{d}V(t)$

(ニ) $r_p=\dfrac{1}{\omega C\tan\delta}$

(ホ) $\overline{I(t)V(t)}=\dfrac{1}{2}V_0{}^2\omega C\tan\delta$

(ヘ) 0.39 W

5.9 棒の側面からの磁束の洩れを無視して考える．$B=1.0$ T，$\Phi=0.79\times10^{-4}$ Wb，磁気モーメント 3.1 $\mathrm{J\cdot T^{-1}}$

5.10 $B=\dfrac{1}{2}\mu_0M(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$,　$H=-M\left(1-\dfrac{1}{2}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\right)$

5.11 $F=\dfrac{1}{2}\mu_0M^2S$

5.12 8×10^{-6} C

5.13 0.008 W

5.14 略

5.15 § 5.2，例 6 を参照せよ．隙間がなければ飽和の影響を受ける．

5.16 (イ) $\Phi=\dfrac{\kappa_m\mu_0S}{l}(N_1I_1+N_2I_2)$

(ロ) $\Phi=\dfrac{1}{\omega N_1}V_0\sin\omega t$,　$V_2=-\dfrac{N_2}{N_1}V_1$,　$W=0$

(ハ) Φ と V_2 は不変．$I_2=V_2/R$

(ニ) $\Delta I_1=-\dfrac{N_2}{N_1}\dfrac{V_2}{R}=\left(\dfrac{N_2}{N_1}\right)^2\dfrac{V_1}{R}$

(ホ) $W=\overline{V_1(t)I_1(t)}=\left(\dfrac{N_2}{N_1}\right)^2\dfrac{V_0{}^2}{2R}=\overline{I_2(t)^2R}$

5.17 (イ) $\mu_B=9.28\times10^{-24}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}=5.79\times10^{-9}\ \mathrm{eV\cdot(gauss)^{-1}}$

(ロ) Fe 2.17,　Co 1.69,　Ni 0.58

5.18 (イ) 磁気モーメント $\mu=-\dfrac{1}{2}q_e\omega r^2$.（円運動が z 軸に関し右ねじ向きのとき $\omega>0$，左ねじ向きのとき $\omega<0$ とする．）

(ロ) $\dot{\omega}=\dfrac{q_e\dot{B}}{2m_e}$

(ハ) $\Delta\omega=\dfrac{q_eB}{2m_e}$,　$\Delta\mu=-\dfrac{q_e{}^2r^2}{4m_e}B$

(ニ) 略

(ホ) $\chi_m=-\dfrac{\mu_0NZq_e{}^2}{6m_e}r^2$

(ヘ) He 0.59×10^{-10} m,　Ne 0.49×10^{-10} m,　Ar 0.62×10^{-10} m

索　引

ア　行

カ　行

サ　行

タ 行

ナ　行

ハ　行

マ 行

ヤ 行

ラ 行

著者略歴

加藤（かとう） 正昭（まさあき）

1955年　東京大学理学部物理学科卒業

現　在　東京大学名誉教授

主要著書　フェルミ『熱力学』（訳）（三省堂）

『量子力学』（産業図書）

『演習電磁気学』（サイエンス社）

ワインバーグ『窮極理論への夢』（共訳）

（ダイヤモンド社）

基礎物理学3　電磁気学

1987年3月20日　初　版

1999年9月28日　第9刷

検印廃止

著　者　加藤正昭

発行者　河野通方

発行所　財団法人　東京大学出版会

113-8654　東京都文京区本郷　東大構内

電　話（03）3811-8814

振替00160-6-59964・FAX（03）3812-6958

新日本印刷株式会社・牧製本印刷株式会社

ISBN 4-13-062073-8　Printed in Japan